

Primljen / Received: 11. 1. 2023.

Ispravljen / Corrected: 12. 9. 2024.

Prihvaćen / Accepted: 29. 9. 2024.

Dostupno online / Available online: 10.2.2025.

# Analiza izbočenja hrpta spregnutih nosača čelik-beton s obzirom na pridržanja pojasnicom

## Autori:

**Qifeng Chen**, dipl.ing.građ.

Znanstveno i tehnološko sveučilište Guangxi, Liuzhou, Kina

Fakultet građevinarstva i arhitekture

Guangxi Beitou Traffic Maintenance Technology Group Co., Nanning, Kina

[Chenqifeng3333@163.com](mailto:Chenqifeng3333@163.com)**Zhiyao Hou**, dipl.ing.građ.

Guangxi Beitou Traffic Maintenance Technology Group Co., Nanning, Kina

[hzy@my.swjtu.edu.cn](mailto:hzy@my.swjtu.edu.cn)

Autor za korespondenciju

**Tianzhi Hao**, dipl.ing.građ.

Guangxi Beitou Traffic Maintenance Technology Group Co., Nanning, Kina

[haotz@bgjgc.com](mailto:haotz@bgjgc.com)**Jiejun Ning**, dipl.ing.građ.

Guangxi Beitou Traffic Maintenance Technology Group Co., Nanning, Kina

[417971615@qq.com](mailto:417971615@qq.com)

Prethodno priopćenje

**Qifeng Chen, Zhiyao Hou, Tianzhi Hao, Jiejun Ning**

## Analiza izbočenja hrpta spregnutih nosača čelik-beton s obzirom na pridržanja pojasnicom

Utvrđen je mehanički model za proučavanje izbočenja hrpta spregnutih nosača čelik-beton pod utjecajem pridržanja pojasnicom. Primjenom Rayleigh-Ritzove varijacijske metode i elastične teorije izbočenja predložen je teorijski model izračuna izbočenja za spregnute nosače čelik-beton s hrptovima pridržanima pojasnicama. Analizom parametara ispitana su odstupanja koeficijenta izbočenja hrpta s koeficijentom rotacijskog pridržanja spregnutih nosača čelik-beton pri različitim omjerima širine i gradijentima naprezanja. Točnost izračuna predloženog teorijskog modela provjerena je usporedbom rezultata izračuna pri različitim parametrima s rezultatima tradicionalnog modela. Naposljetku, s obzirom na različite raspodjele moždanika, teorijski model predložen u ovome istraživanju potvrđen je metodom konačnih elemenata. Dobiveni su sljedeći rezultati: odstupanje između teorijskog modela i tradicionalnog modela bilo je manje od 3 %, nakon što se razmak moždanika povećao sa 100 na 1000 mm, kritično naprezanje izbočenja izračunano metodom konačnih elemenata smanjilo se sa 121,90 na 113,29 MPa, uz odstupanje manje od 6 % od teorijskog modela u ovome radu i teorijski model i izračun metodom konačnih elemenata pokazuju to da kada se koeficijent elastičnog pridržanja bio veći od 20, područje koeficijenta izbočenja nije se smanjivalo.

### Ključne riječi:

spregnuti nosači čelik-beton, moždanici, izbočenje, rotacijsko pridržanje, hrpat, spregnute pojasnice čelik-beton, kritična naprezanja

Research Paper

**Qifeng Chen, Zhiyao Hou, Tianzhi Hao, Jiejun Ning**

## Web buckling analysis of steel-concrete composite beams considering flange restraints

A mechanical model was established to study the buckling of the web of steel-concrete composite beams under flange restraint. Based on the Rayleigh-Ritz variational methodology and elastic buckling theory, a theoretical buckling calculation model for steel-concrete composite beams with webs restrained by flanges was proposed. Through a parameter analysis, the variation in the web buckling coefficient with the rotational restraint coefficient of steel-concrete composite beams under different web aspect ratios and stress gradients was studied. The calculation accuracy of the proposed theoretical model was verified by comparing the calculation results under different parameters with those of a traditional model. Finally, considering the different distributions of the shear studs, the theoretical model proposed in this study was verified using the finite element method. The following results were obtained: the deviation between the theoretical model and the traditional model was less than 3 %, when the spacing of shear studs increased from 100 to 1000 mm, the critical buckling stress calculated by finite element method decreased from 121.90 to 113.29 MPa, with a deviation of less than 6 % from the theoretical model in this paper, both the theoretical model and the finite element calculation show that when the elastic restraint coefficient was greater than 20, the buckling coefficient region was constant.

### Key words:

steel-concrete composite girders, shear studs, buckling, rotational restraints, web plates, steel-concrete composite flanges, critical stresses

## 1. Uvod

Spregnuti nosači čelik-beton posljednjih se godina intenzivno upotrebljavaju u izgradnji mostova velikih raspona. Ta vrsta spregnutog elementa kombinira svojstva visoke integralne krutosti, male težine i mogućnosti izvedbe preko velikog raspona. Međutim, omjer visine i debljine hrptova koji se upotrebljavaju u tim spregnutim nosačima je velik, a posljedica je vitkog dizajna tendencija lokalnog izbočenja. U tome slučaju neophodno je točno procijeniti elastični kritični faktor izbočenja kako bi se izbjeglo lokalno izbočenja tijekom optimiranja hrpta. Tradicionalno se elastično izbočenje čeličnih ploča određivalo na temelju pretpostavki da su hrptovi jednostavno oslonjeni na spojevima između pojasnica i hrpta. Većina istraživanja temelji se na pretpostavci iz [1-4], a primjenjivale su se energetska metoda, eksperimentalna metoda i metoda konačnih elemenata (FEM) za analizu ponašanja izbočenja ploča povezanih s naprezanjima uslijed savijanja i smicanja. Na primjer, nakon dodavanja rubnih uvjeta u računalni program EBPlate, ponašanje hrpta pri izbočenju može se analizirati pomoću Rayleigh-Ritzove varijacijske metode [5]. Rezultati su konzervativni jer nije uzeto u obzir rotacijsko pridržanje pojasnica. Štoviše, rezultati su konzervativniji za spregnute nosače jer su koeficijenti rotacijskog pridržanja viši za pojasnice spregnutih nosača čelik-beton. Estrada i sur. [6, 7] otkrili su da su koeficijenti izbočenja uslijed posmika stvarnih rubnih uvjeta bili između jednostavno oslonjenih i upetih rubnih uvjeta. Keerthan [8] i Bedair [9] također su naveli da konzervativni rubni uvjeti hrptova nisu bili dovoljno precizni. Zato se u obzir moraju uzeti učinci stvarnih uvjeta pridržanja na spoju između pojasnice i hrpta.

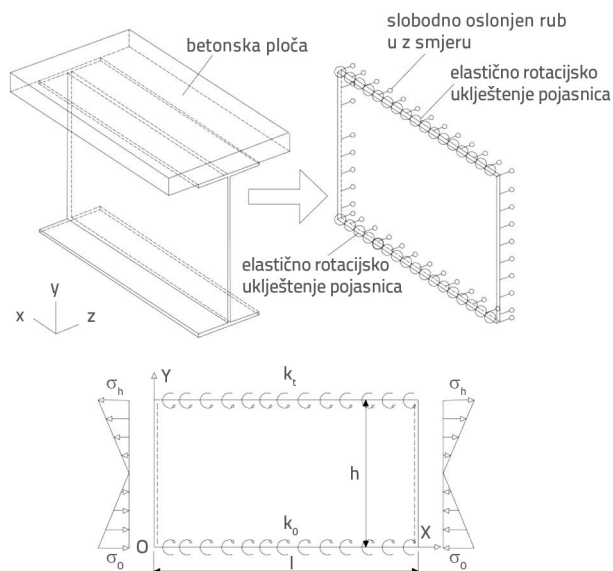
Kako bi razmotrio rotacijsko pridržanje pojasnica, Qiao je upotrijebio kombinirane harmonijske i polinomne funkcije deformacije uslijed izbočenja i Ritzovu energetska metodu [10, 11] kako bi izveo formulu kritičnog naprezanja uslijed izbočenja za ortotropnu ploču pri osnomo tlaku i posmiku. Pham je analizirao karakteristike izbočenja hrpta u posmiku kod tankostjenih C-profila [12], gdje se kritično naprezanje izbočenja hrpta povećavalo s povećanjem rotacijskog pridržanja pojasnica. Keerthan je istraživao elastično izbočenje hrptova uslijed posmika za nosače LiteSteel [8], a rezultati su pokazali da je vrijednost koeficijenta izbočenja hrpta bila između koeficijenata za rubne uvjete jednostavnog oslanjanja i upetih rubnih uvjeta. László je izveo eksplicitnu matematičku formulu za ploču s rotacijski pridržanim uzdužnim rubovima. Chen Liang [13] proučavao je dvostupanjski raspored moždanika, izveo odnos između progiba srednjeg raspona i krutosti sučelja te razvio metodu za izračun progiba spregnutih nosača na temelju praga posmične krutosti sučelja u graničnome stanju. Alexandre Rossi [14], Krzysztof Śledziwski [15], W.M.A.D. Wijethunter [16] i dr. primijenili su metodu konačnih elemenata za proučavanje bočnog izvijanja čelično-betonskih spregnutih konstrukcija, ali nisu uzeli u obzir utjecaj rasporeda moždanika. Araujo [17] analizirao je bočno izvijanje spregnutih čelično-betonskih

konstrukcija na temelju kinematike i mehanike te izveo analitičku formulu za izračun izvijanja jednostavno oslonjenih I-nosača pridržanih betonom. Međutim, formula nije uzela u obzir utjecaj raspodjele moždanika. Brojna se istraživanja bave izbočenjem hrpta [18, 19] ili načinom na koji rotacijsko pridržanje rubova utječe na način izbočenja hrpta, no do sada nisu dostupne informacije o tome kako pojasnice spregnutih nosača čelik-beton utječu na koeficijent izbočenja hrpta te još uvijek nije poznato kako betonska ploča i moždanici utječu na koeficijent izbočenja.

U ovom je radu razvijen teorijski model za proučavanje lokalnog izbočenja hrpta spregnutih nosača s elastično pridržanim rubovima, koji je izložen neravnomjernome tlaku u ravnini. Ritzova metoda varijacije energije primijenjena je kao teorijska formula za neravnomjerni tlak za izračun kritičnog koeficijenta izbočenja hrpta. Potom su na temelju teorije elastičnosti ploča izvedeni koeficijenti elastičnog pridržanja pojasnica spregnutih nosača čelik-beton s različitim raspodjelama moždanika. Konačno, uspostavljen je model konačnih elemenata (FEM) segmenta spregnutog I-nosača čelik-beton kako bi se provjerila točnost formule.

## 2. Formula za lokalno izbočenje pridržanog hrpta

U ovome je poglavlju opisana formula za lokalno izbočenje hrpta spregnutog nosača izloženog neravnomjernim osnim opterećenjima u ravnini duž jednostavno oslonjenih rubova. Uspostavljen je model mehaničke analize kao što je to prikazano na slici 1. Budući da je u tome modelu rotacijska krutost poprečnog ukrućenja puno niža od krutosti pojasnica, hrbat spregnutog nosača i rubni uvjeti mogu se pojednostaviti kao pravokutna ploča čiji su desni i lijevi rubovi jednostavno oslonjeni, a gornji i donji rubovi rotacijski pridržani [10].



Slika 1. Model mehaničke analize hrpta spregnutog nosača čelik-beton

U ovome istraživanju  $U$  označava energiju elastičnog naprezanja pohranjenu u hrptu,  $U_{brou}$  energiju deformacije pohranjenu u rotacijski pridržanim rubovima hrpta,  $V_b$  rad neravnomjernih osnih sila, a  $w$  pomak uslijed izbočenja. Na temelju Rayleigh–Ritzove varijacijske metode funkcija pomaka odabrana je za deformaciju uslijed elastičnog izbočenja hrptova s rotacijski pridržanim rubovima, a izražava se kao

$$w(x, y) = \left[ \frac{y}{h} + w_1 \left( 1 - \cos \frac{\pi y}{h} \right) + w_2 \left( \frac{y}{h} \right)^3 + w_3 \left( \frac{y}{h} \right)^4 \right] \times \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin \left( \frac{m\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

pri čemu su  $w_1$ ,  $w_2$ , i  $w_3$  nepoznate konstante koje se mogu odrediti rubnim uvjetima,  $h$  visina hrpta,  $l$  širina hrpta, a  $m$  neodređeni koeficijent. Rubni uvjeti za rotacijski pridržane rubove prikazane na slici 1. izraženi su na sljedeći način:

$$w(x, 0) = 0; w(x, h) = 0 \quad (2)$$

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = C_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y_{,y=0}} \quad (3)$$

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = C_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y_{,y=h}}$$

$$C_0 = GJ_s = G \sum \frac{1}{3} m_i t_i^3 \quad (4)$$

$$C_t = GJ_s = G \sum \frac{1}{3} m_i t_i^3$$

pri čemu su  $C_0$  i  $C_t$  torzijske krutosti gornje i donje pojasnice,  $m_i$  širina ploče pojasnice,  $t_i$  debljina pojasnice,  $G$  modul posmika čelika, a  $D$  koeficijent krutosti uslijed savijanja hrpta. Zamjenom rezultata izraza (1) izrazom (3), ona se može približno odrediti na sljedeći način:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx k_0 \frac{\partial w}{\partial y_{,y=0}} \quad (5)$$

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx k_t \frac{\partial w}{\partial y_{,y=h}}$$

pri čemu  $k_0$  i  $k_t$  označavaju krutost elastičnoga rotacijskog pridržanja donje i gornje pojasnice [20] i mogu se izraziti kao

$$k_0 = \pi^2 C_0 / l^2, k_t = \pi^2 C_t / l^2 \quad (6)$$

Zamjenom rezultata izraza (1) izrazima (2) i (5) nepoznate konstante funkcije pomaka koje zadovoljavaju sve rubne uvjete mogu se riješiti na sljedeći način:

$$w_1 = \frac{X_0}{\pi^2} \quad (7)$$

$$w_2 = \frac{12\pi^2 + 24X_0 + \pi^2 X_0 - 3\pi^2 X_t - 8X_0 X_t}{\pi^2 (X_t - 6)} \quad (7)$$

$$w_3 = -\frac{6\pi^2 + 12X_0 + \pi^2 X_0 - 2\pi^2 X_t - 6X_0 X_t}{\pi^2 (X_t - 6)}$$

pri čemu su  $\chi_0$  i  $\chi_t$  koeficijenti elastičnog pridržanja gornje i donje pojasnice [10, 20], koji se izražavaju kao:

$$X_0 = k_0 h / D, X_t = k_t h / D \quad (8)$$

Na temelju Ritzove energetske metode energija elastične deformacije hrpta  $U$  izražava se kao

$$U = \frac{D}{2} \int_0^h \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy \quad (9)$$

pri čemu je  $\nu$  Poissonov omjer. Energija deformacije  $U_{brou}$  pohranjena u graničnoj ekvivalentnoj opruzi izražava se na sljedeći način:

$$U_{brou} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ k_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x_{,y=0}} \right)^2 + k_t \left( \frac{\partial w}{\partial x_{,y=h}} \right)^2 \right] dx \quad (10)$$

Rad  $V_b$  ostvaren nejednolikim opterećenja u ravnini može se izraziti kao

$$V_b = -\frac{\sigma_0 t}{2} \int_0^h \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( 1 - \lambda \frac{y}{h} \right) dx dy \quad (11)$$

pri čemu izraz  $\sigma = (\sigma_0 - \sigma_t) = \sigma_0$  označava koeficijent gradijenta opterećenja u ravnini nejednolike raspodjele opterećenja, a  $\sigma_0$  i  $\sigma_t$  definiraju se kao naprezanje u točki  $g = 0$  i  $h$ . Prema zakonu o očuvanju energije, varijacijski oblik ukupne potencijalne energije hrpta izražen je izrazom (12):

$$\delta \Pi = \delta U + \delta U_{brou} - \delta V_b = 0 \quad (12)$$

S obzirom na to da je varijacija  $m$  proizvoljna [10],  $i$  linearne jednadžbe mogu se pronaći u izrazu (13). Svojtvena vrijednost  $i$  linearne jednadžbe može se riješiti pomoću izraza (14).

$$K_j \alpha_j = 0 \quad (13)$$

$$|K_j| = 0 \quad (14)$$

Zamjenom rezultata izraza (1) izrazima (12) i (14) varijacijski oblik energije elastične deformacije pohranjene u hrptu  $U$ , energija deformacije pohranjena u rotacijskome pridržanju hrpta  $U_{brou}$  i djelovanje nejednolike osne sile  $V_b$  mogu se pojedinačno riješiti na sljedeći način:

$$\delta U = \left[ \begin{aligned} & \frac{D\pi^4 h}{5040l^3} A_1 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^4 \delta \alpha_m + \frac{Dl}{4h^3} A_2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta \alpha_m - \\ & \frac{Dv\pi^2}{2hl} A_3 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^2 \delta \alpha_m + \frac{D(1-v)\pi^2}{210hl} A_6 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^2 \delta \alpha_m \end{aligned} \right] \quad (15)$$

$$\delta V_b = -\frac{\sigma th\pi^2}{10080l} A_7 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^2 \delta \alpha_m$$

$$\delta U_{brou} = \frac{ID}{4h^3} A_4 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta \alpha_m$$

Detaljni izrazi za  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_7$  navedeni su u tablici 1. Zamjenom  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_7$  u izrazu (15) može se dobiti rješenje prve svojstvene vrijednosti za hrbat, a kritični koeficijent lokalnog izbočenja može se izraziti kao:

$$k_b = -\frac{10080}{A_7 \pi^4} \left( \frac{\pi^4 m^2}{5040 \gamma^2} A_1 + \frac{\gamma^2}{40 m^2} A_2 + \frac{v \pi^2}{140} A_3 + \frac{(1-v)\pi^2}{140} A_6 + \frac{\gamma^2}{4 m^2} A_4 \right) \quad (16)$$

pri čemu je  $\gamma = l/h$  razmjer proporcija hrpta. Kritično naprezanje uslijed izbočenja hrpta može se izraziti na sljedeći način:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_b \pi^2 D}{h^2 t} \quad (17)$$

Tablica 1. Izrazi za  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_7$  navedeni u izrazu (15)

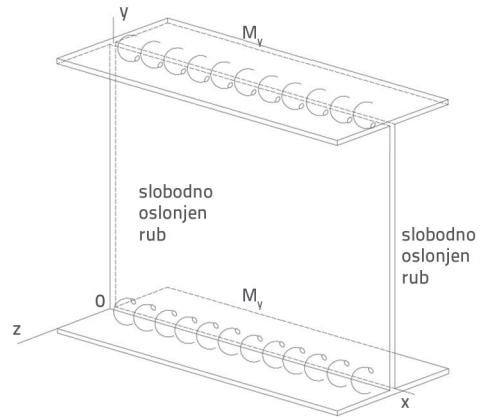
$A_1 = \left\{ \begin{aligned} & -30240\omega_1(\omega_2 + 2\omega_3) + 2520\pi^2\omega_1(2 + 3\omega_2 + 4\omega_3) \\ & + \pi^4 \left[ \begin{aligned} & 1890\omega_1^2 + 180\omega_2^2 + 126\omega_1(10 + 5\omega_2 + 4\omega_3) \\ & + 63\omega_2(8 + 5\omega_3) + 140(3 + 3\omega_3 + \omega_3^2) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$
$A_2 = \left[ \begin{aligned} & 5\pi^2\omega_1^2 + 120\omega_2^2 + 360\omega_2\omega_3 \\ & + 288\omega_3^2 - 240(\omega_2 + 2\omega_3) \end{aligned} \right]$
$A_3 = \left[ \begin{aligned} & -35\pi^4\omega_1 + 1680\omega_1(\omega_2 + 2\omega_3) + 210\pi^2\omega_2\omega_3 \\ & 2\pi^2(-70\omega_1 + 42\omega_2^2 + 70\omega_2 + 105\omega_3 + 60\omega_3^2) \end{aligned} \right]$
$A_4 = [X_0 + X_t(1 + 3\omega_2 + 4\omega_3)^2]$
$A_6 = \left[ \begin{aligned} & 35\pi^4\omega_1 - 1680\omega_1(\omega_2 + 2\omega_3) + 2\pi^2(70\omega_2 + 80\omega_3^2 + 140\omega_1) + \\ & 2\pi^2(35 + 63\omega_2^2 + 70\omega_3 + 140\omega_1\omega_3 + 210\omega_1\omega_2 + 280\omega_1\omega_3) \end{aligned} \right]$
$A_7 = \left\{ \begin{aligned} & 5040\omega_1[-2 - 3\omega_2 + 4\omega_3 + \lambda(2 + 2\omega_1 + 4\omega_2 + 5\omega_3)] / \pi^2 - \\ & 60480\omega_1[\omega_2(2\lambda - 1) + \omega_3(5\lambda - 2)] / \pi^4 + 129600\omega_1\omega_2\lambda / \pi^6 \\ & - 280[3 + \omega_3(3 + \omega_3)] + 1890\omega_1^2(\lambda - 2) + 36\lambda\omega_3(20 + 7\omega_3) \\ & + 45\omega_2^2(7\lambda - 8) + 84\omega_1[-6(5 + 2\omega_3) + 3\omega_3(4\lambda - 5)] + 590\lambda \\ & + 14\omega_2[-72 + 60\lambda + 5\omega_3(8\lambda - 9)] + 840\omega_1(2 + \omega_3)\lambda \end{aligned} \right\} \pi^6$

### 3. Koeficijent rotacijski pridržanog hrpta

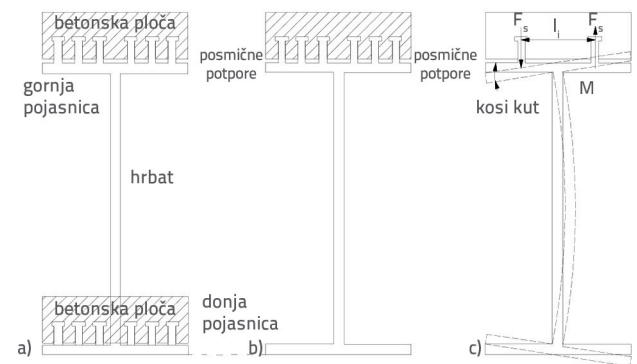
Na temelju Rayleigh-Ritz varijacijske metode izraz koeficijenta izbočenja za rotacijski pridržan hrbat na gornjoj i donjoj pojasnici izveden je pomoću izraza (16). Iako su koeficijenti elastičnog

pridrzanja,  $\chi_0$  i  $\chi_t$  za gornju i donju pojasnicu u spregnutome nosaču još nepoznati, taj je problem riješen u ovome poglavlju. Rješenja predstavljena u ovome poglavlju mogu se primijeniti samo u konačnome stanju, kada je betonska pojasnica očvrstnula, i ne mogu se uzeti u obzir tijekom izgradnje, dok beton ne očvrstne. Najprije se raspravlja o rubnim uvjetima za hrbat u I-nosaču duž spojeva pojasnica i hrpta, a zatim se analizira koeficijent rotacijskog pridržanja hrpta u čelično-betonskome spregnutom I-nosaču. Prema radu Qiaoa [10], rubni uvjeti hrpta kod čeličnih nosača mogu se pojednostaviti kao što je to prikazano na slici 2. Rubovi na spoju hrpta i pojasnice pojednostavljeni su kao elastično i rotacijski pridržani, dok je torzijska krutost poprečnih ukrčenja mnogo manja od krutosti pojasnica te se lijevi i desni rubovi hrpta mogu pojednostavljeno smatrati kao slobodno oslonjeni rubovi. Timoshenko [20] je dokazao da tijekom izbočenja u spoju hrpta i pojasnice (slika 3.) kut rotacije pojasnice treba iznositi  $\partial w / \partial g$ , a brzina promjene kuta rotacije duž nosača  $\partial^2 w / \partial g \partial x$ . Brzina torzijskog momenta promjene jedinične duljine duž x-osi u bilo kojemu poprečnom presjeku gornje i donje pojasnice može se izraziti kako slijedi:

$$C_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_{,y=h}}, C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_{,y=0}} \quad (18)$$



Slika 2. Pojednostavljenje rubova hrpta u segmentu I-nosača



Slika 3. Mehanička analiza moždanika u spregnutim nosačima čelik-beton s izbočenim hrptom: a) dvostruko spregnuti nosač; b) betonska ploča na gornjoj pojasnici; c) pojednostavljeni model

Prema uvjetima kompatibilnosti hrpta s pojasnicama, moment savijanja jedinične duljine hrpta (duž spojeva pojasnice i hrpta) trebao bi biti jednak brzini promjene torzijskog momenta jedinične duljine gornje i donje pojasnice, a rubni uvjeti gornjih i donjih rubova hrpta iskazani su izrazima (3) i (5). S obzirom na to da su čelična pojasnica i betonska ploča kombinirana pojasnica povezana moždanicima, torzijska krutost ( $C_z$ ) kombinirane pojasnice može se izraziti kao

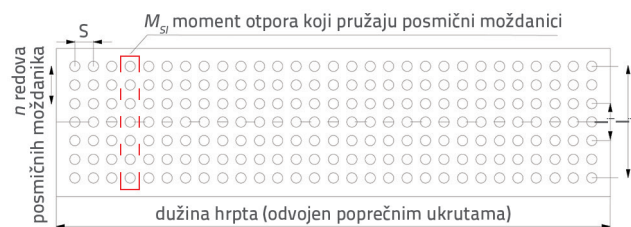
$$C_z = \min\{C_c, C_s\} + C_t \quad (19)$$

pri čemu  $C_c$  označava torzijsku krutost betonske ploče,  $C_s$  torzijsku krutost koju osiguravaju moždanici, a  $C_0$  torzijsku krutost čelične pojasnice. Kombinirane pojasnice beton–čelik iskrivile su se kada se hrpt izbočio. Kao i kod para simetričnih moždanika, na jednoj strani moždanika postoji tlak, a na drugoj vlak, kao što je to prikazano na slici 3., gdje je moment savijanja  $M_y$  duž stranica gornje i donje pojasnice hrpta proporcionalan kutu uvijanja  $\partial w/\partial g$ , a unutarnja sila moždanika  $F_s$  mora biti usklađena s odnosom naprezanja i opterećenja moždanika. Dakle, otpornost na savijanje  $M_{s0}$  koju pruža svaki par moždanika iznosi:

$$M_{s0} = F_s L_t = \frac{EA I_t^2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (20)$$

Pod pretpostavkom da na jednoj strani hrpta nema redova moždanika kao što je to prikazano na slici 4., otpornost na savijanje  $M_{s1}$  osigurana stupcem moždanika iznosi:

$$M_{s1} = \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (21)$$



Slika 4. Raspodjela moždanika na pojasnici

Prosječni moment savijanja po jedinici duljine duž spojeva pojasnice i hrpta jest:

$$\frac{M_{s1}}{s} = -\sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (22)$$

pri čemu je  $s$  uzdužna udaljenost moždanika. Dakle, brzina promjene momenta savijanja (uvijanja) duž spojeva pojasnice i hrpta jest

$$-\frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{M_{s1}}{s} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s} \right) \quad (23)$$

Iz izraza (3) proizlazi da je brzina promjene momenta uvijanja duž spojeva pojasnice i hrpta u pojasnici numerički jednaka momentu savijanja po jedinici duljine gornjeg ruba hrpta i može se izraziti kao:

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s} \right) \quad (24)$$

Navedeno se može pojednostaviti na sljedeći način:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{\pi}{l} \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s} \quad (25)$$

Zato se ekvivalentna krutost pojasnice na uvijanje može izraziti kao:

$$C_s = \frac{l}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s} \quad (26)$$

Zamjenom rezultata izraza (19) izrazom (5) rubni uvjeti rotacijski pridržanih rubova u spregnutome nosaču izraženi su na sljedeći način:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx C_z \frac{\pi^2}{l^2} \frac{\partial w}{\partial y} = (C_t + \min\{C_s, C_c\}) \frac{\pi^2}{l^2} \frac{\partial w}{\partial y_{y=h}} \quad (27)$$

S obzirom na to da je krutost betonske ploče pri uvijanju  $C_c$  puno veća od one kod moždanika  $C_s$ , krutost na uvijanje kombinirane pojasnice čelik–beton određena je krutošću na uvijanje moždanika. Elastični koeficijent rotacijskog pridržanja kombinirane pojasnice čelik–beton ( $\chi_t$ ) može se izraziti na sljedeći način:

$$\chi_t \approx \frac{k_t h}{D} = \left( C_t + \sum_{i=1}^n \frac{EA I_i^2}{2s\pi} \right) \frac{\pi^2 h}{l^2 D} \quad (28)$$

Elastični koeficijent rotacijskog pridržanja pojasnice bez betonske ploče ( $\chi_0$ ) može se izraziti kao:

$$\chi_0 \approx \frac{k_0 h}{D} = C_0 \frac{\pi^2 h}{l^2 D} \quad (29)$$

Izrazi (28) i (29) pokazuju da je elastični koeficijent rotacijskog pridržanja spoja pojasnice i hrpta obrnuto proporcionalan kvadratu širine hrpta i proporcionalan visini hrpta.

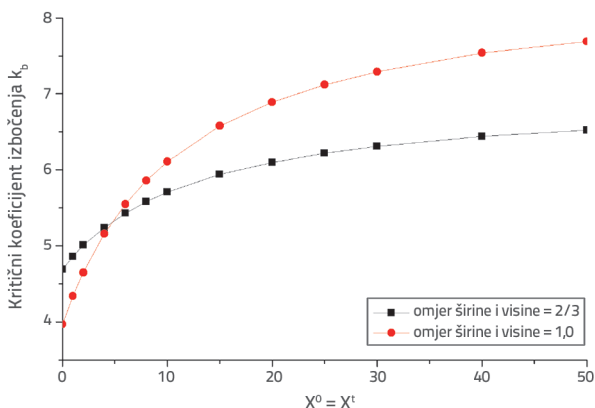


### 4. Parametarska analiza

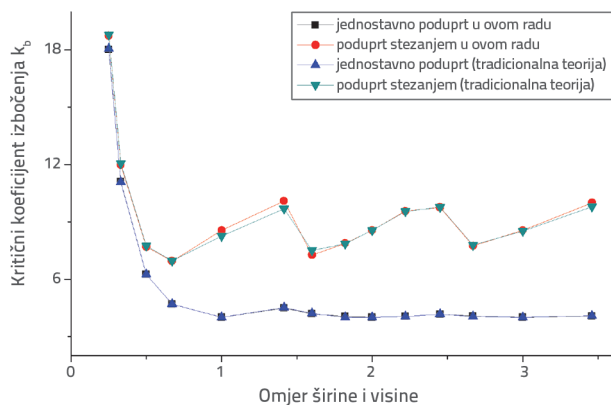
Na temelju Timoshenkove teorije izvijanja [20], elastični koeficijent rotacijskog pridrzanja spoja hrpta i kombinirane pojasnice čelik-beton izveden je pomoću izraza (28). Kako bi se provjerila točnost teorijskog modela, provedena je parametarska analiza.

#### 4.1. Rješenje kritičnog napreznja zbog izbočenja (gradijent napreznja $\lambda = 0$ )

U slučaju gradijenta napreznja  $\lambda = 0$ , uz pretpostavku da su omjeri širine i visine 2/3 odnosno 1/1, elastični rotacijski koeficijenti pridrzanja ( $\chi_0 = \chi_t$ ) za gornju i donju pojasnicu povećani su s 0 na 50 (koeficijent pridrzanja  $\chi_0 = \chi_t = 0$  označava slobodno oslonjeni rub, a  $\chi_0 = \chi_t \rightarrow \infty$  upeti rub). Rezultati analize prikazani su na slici 5., prema kojoj se lokalni kritični koeficijent izbočenja povećava kako se povećava koeficijent pridrzanja. Kada je vrijednost  $\chi_0 = \chi_t$  veća od 20, brzina rasta lokalnoga kritičnog koeficijenta izbočenja  $k_b$  se usporava, a koeficijent izbočenja teži ostati konstantan.



Slika 5. Kritični lokalni koeficijent izbočenja hrpta kada su koeficijenti rotacijskog pridrzanja gornje i donje pojasnice promijenjeni s 0 na 50 pri omjerima širine i visine 1/1 i 2/3

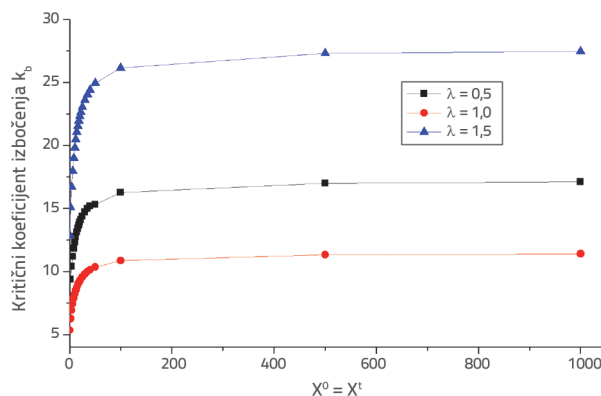


Slika 6. Lokalni kritični koeficijent izbočenja kada je hrbat pod ravnomjernim tlakom uspoređen je s onim tradicionalnog modela u literaturi [21] i s modelom razvijenim u ovom radu

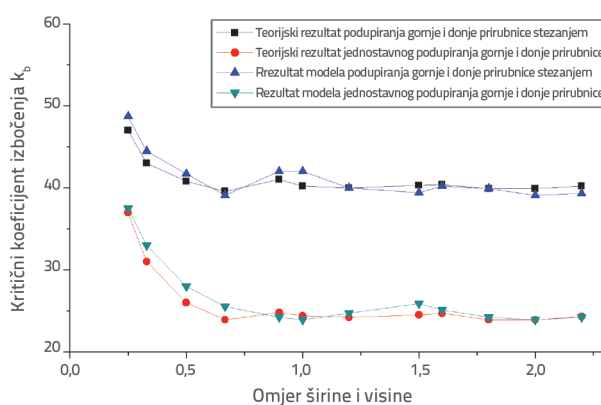
Na slici 6. prikazana su dva slučaja: (1) kada su svi rubovi slobodno oslonjeni (engl. *simply supported* - SSSS) i (2) kada su rubovi s napreznjem slobodno oslonjeni, a rubovi bez napreznja upeti (CCSS). Kao što je to prikazano na slici 6., rezultati modela razvijenog u ovom radu bliski su tradicionalnim teorijskim rezultatima [21], sa stopom pogreške od < 3 %.

#### 4.2. Rješenje kritičnog napreznja zbog izbočenja

Na slici 7. prikazan je način na koji je gradijent napreznja  $\lambda$  utjecao na koeficijent kritičnog izbočenja. Krivulja odnosa koeficijenta ograničenog pridrzanja i koeficijenta izbočenja za različite tlakove, gdje je gradijent tlaka  $\lambda$  bio jednak 0,5, 1,0 odnosno 1,5, prikazana je na slici 7. Povećanjem gradijenta napreznja  $\lambda$  povećava se i koeficijent izbočenja. Kao što je to prikazano na slici 7., koeficijent izbočenja povećava se s koeficijentom pridrzanja. Odnos omjera visine i koeficijenta izbočenja za gradijent tlačnog napreznja  $\lambda = 2$  prikazan je na slici 8. Kada su svi rubovi mreže bili slobodno oslonjeni (SSSS), rubovi s napreznjem bili su slobodno oslonjeni, a rubovi bez napreznja upeti (CCSS). Rezultati su uspoređeni s onima iz tradicionalne teorije [21], a stopa pogreške iznosila je < 3 %.



Slika 7. Odnos kritičnoga koeficijenta izbočenja te gornjeg i donjeg koeficijenta rotacijskog pridrzanja pod nejednolikim tlakovima, kada je gradijent napreznja  $\lambda = 0,5, 1,0$  te  $1,5$



Slika 8. Usporedba kritičnoga koeficijenta lokalnog izbočenja iz tradicionalnog modela u istraživačkoj literaturi [21] i modela razvijenog u ovom radu s gradijentom napreznja  $\lambda = 2$

### 5. Numerička analiza

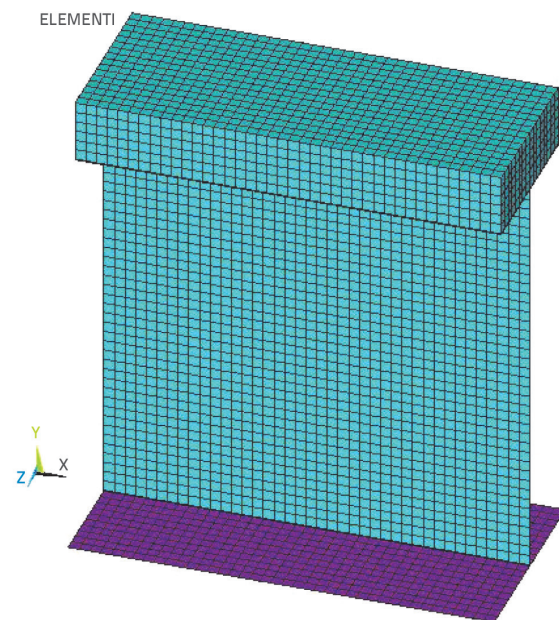
ANSYS, sveobuhvatan program koji primjenjuje metodu konačnih elemenata, nadaleko je poznat po svojim rezultatima izračuna koji mogu točno simulirati ponašanje konstrukcija pri izbočenju u različitim složenim uvjetima. Zato je numerička analiza provedena primjenom softvera konačnih elemenata ANSYS 2019 kako bi se procijenio utjecaj različitih raspodjela moždanika na kritične lokalne koeficijente izbočenja spregnutih nosača. Materijal čelične ploče bio je Q370qE, materijal vijaka ML15, a razred materijala betona C55. Parametri materijala navedeni su u tablici 2. Za čelične nosače primijenjen je konačni element SHELL181, za vijke element BEAM188, a za beton SOLID65. Segmenti spregnutog nosača između dvaju susjednih poprečnih ukrčenja modelirani su kao što je to prikazano na slici 9., a rubni uvjeti i opterećenje definirani su kao što je to prikazano na slici 10. i u tablici 3. Pojasnice i hrbat modelirani su zasebno, ali su povezani sa stupnjevima slobode  $Rot_x$  na čvorovima spojeva hrpta i pojasnice. Ta je geometrija odabrana kako bi se što je moguće više izolirala svojstva hrpta, uzimajući u obzir učinak pojasnica, s razmjerom proporcija hrpta od 1,0 i gradijenta naprezanja  $\lambda = 1$ .

Tablica 2. Parametri materijala

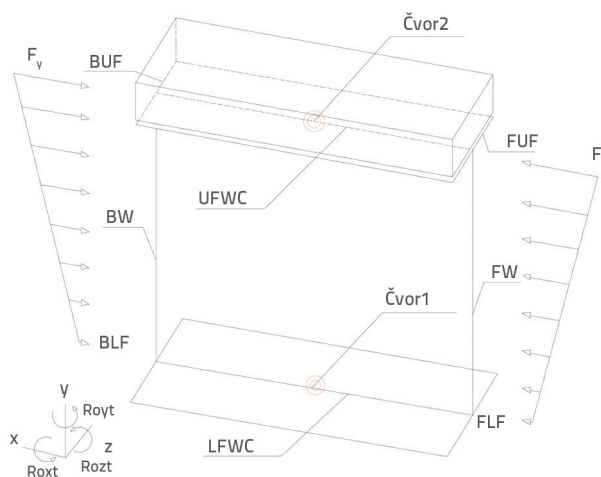
Materijali	Modul elastičnosti [GPa]	Granica popuštanja [MPa]	Vlačna čvrstoća [MPa]	Poissonov koeficijent
Q370qE	210	370	510	0,3
ML15	210	354	437	0,3
C55	35,5	/	/	0,2

Tablica 3. Rubni uvjeti metode konačnih elemenata (0 i 1 označavaju rubne uvjete, upete ili slobodne)

Rubni uvjeti	$u_x$	$u_y$	$u_z$
BUF (stražnja gornja pojasnica)	0	1	0
BW (stražnji hrbat)	0	0	1
BLF (stražnja donja pojasnica)	0	1	0
FUF (prednja gornja pojasnica)	0	1	0
FW (prednji hrbat)	0	0	1
FLF (prednja donja pojasnica)	0	1	0
LFWC (spoj donje pojasnice i hrpta)	0	0	1
UFWC (spoj gornje pojasnice i hrpta)	0	0	1
Čvor 1	1	0	1
Čvor 2	1	0	1



Slika 9. Model konačnih elemenata segmenta spregnutog I-nosača



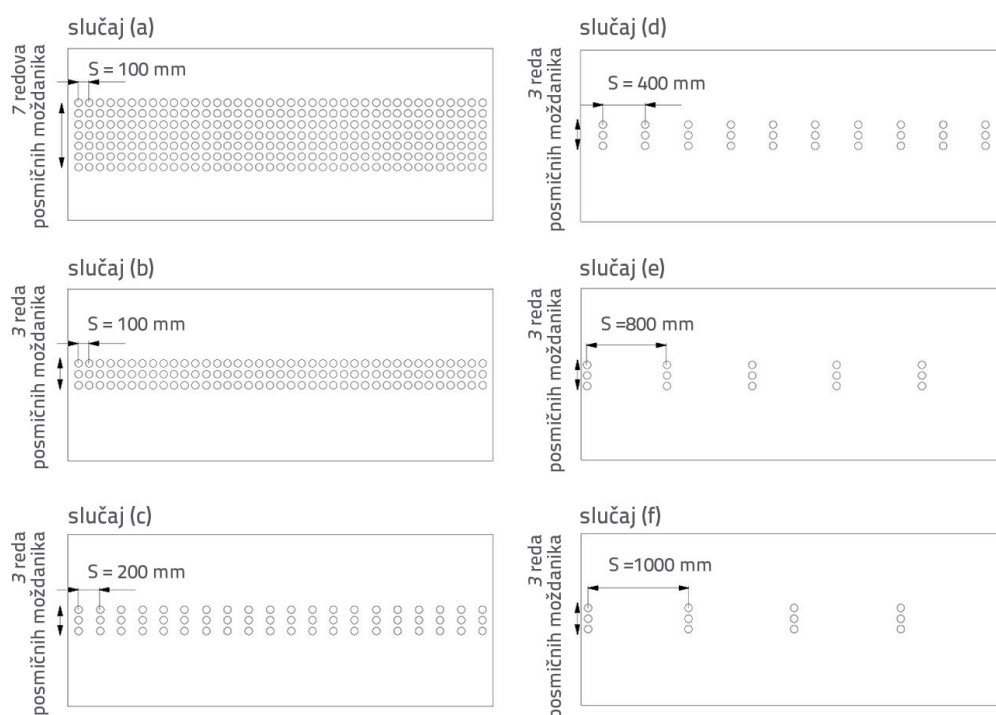
Slika 10. Rubni uvjeti hrpta u spregnutome I-nosaču dobiveni numeričkom analizom

Tablica 4. Parametri segmenta i tip elementa modela konačnih elemenata

Nazivi elemenata	Parametri [mm]
Gornja pojasnica (shell63)	širina × debljina, 1600 × 16
Hrbat (shell63)	širina × debljina, 4000 × 20
Donja pojasnica (shell63)	širina × debljina, 2000 × 20
Betonska ploča (solid45)	širina × debljina, 1600 × 600
Moždanik (beam4)	diameter, 10

Tablica 5. Usporedba FEA i teorijskih rezultata

Raspodjela moždanika	$\chi_0$	$\chi_t$	Rezultati FEM-a [MPa]	Rezultati iz ovog rada [MPa]	Pogreška [%]
slučaj (a)	7,21	227,16	127,85	135,43	5,92
slučaj (b)	7,21	26,07	121,90	127,13	4,29
slučaj (c)	7,21	13,80	120,51	121,20	0,57
slučaj (d)	7,21	7,66	118,38	114,54	3,24
slučaj (e)	7,21	4,59	114,81	108,53	5,47
slučaj (f)	7,21	3,98	113,29	106,89	5,64
bez betonske ploče	7,21	1,53	98,69	98,50	0,19



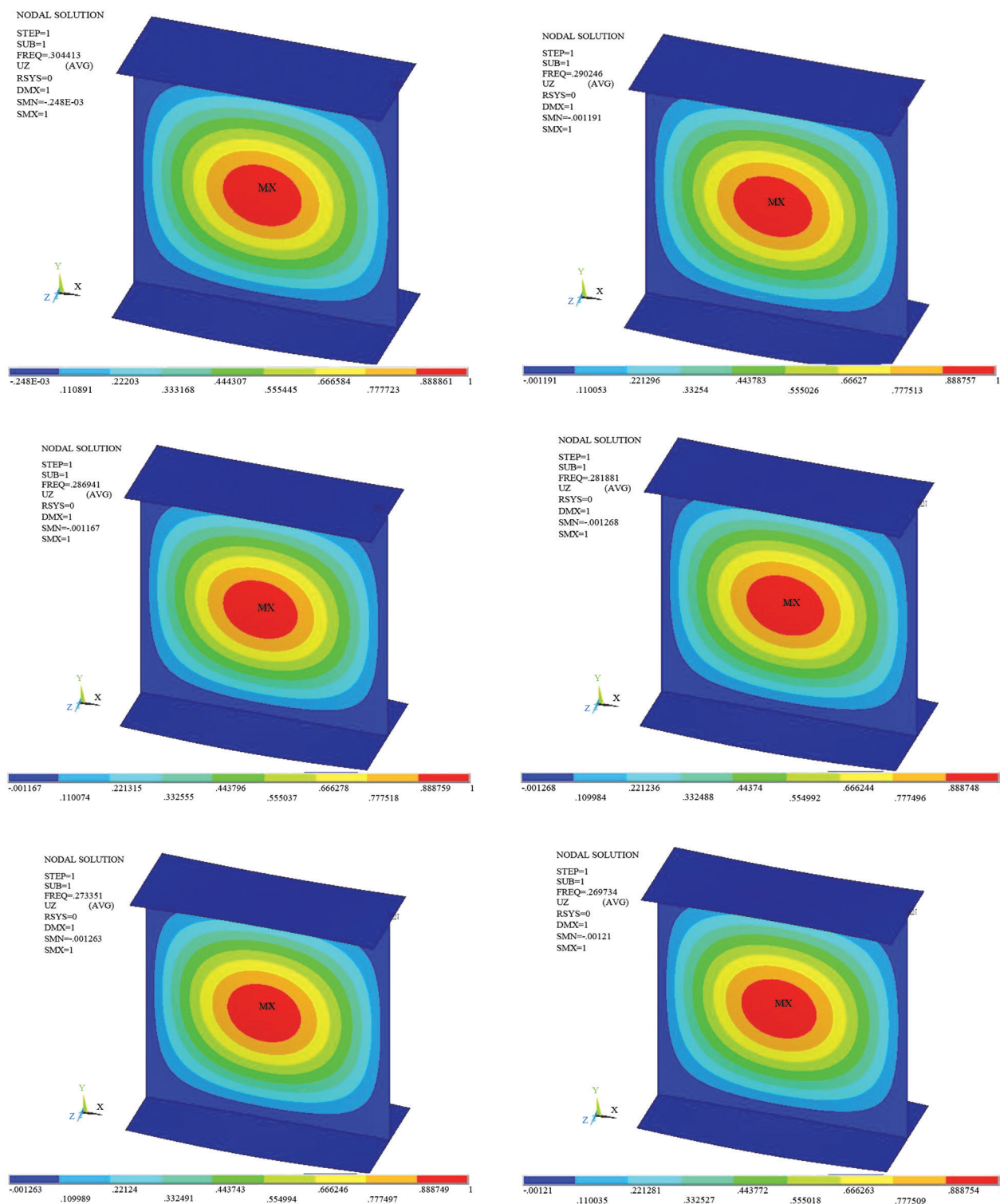
Slika 11. Šest slučajeva raspodjele moždanika

Parametri segmenata spregnutih nosača čelik-beton i tipovi elemenata navedeni su u tablici 4. Razmaci primijenjeni između moždanika u tablici 5. služe samo radi praktičnosti teorijskog istraživanja i ne mogu se upotrijebiti kao osnova za projektiranje konstrukcije.

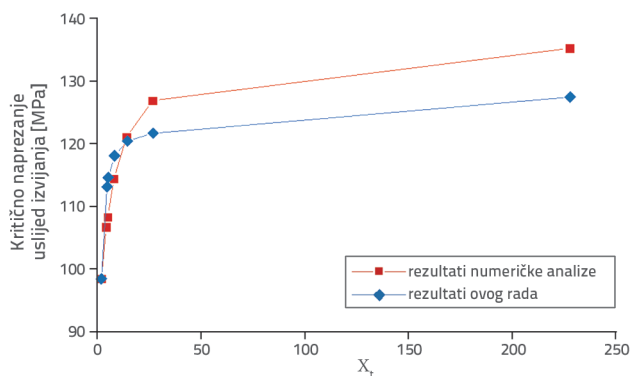
Raspodjela moždanika bila je najvažnija varijabla čiji je utjecaj analiziran. Raspodjele moždanika uključivale su šest slučajeva kao što je to prikazano na slici 11. Za gradijent naprezanja u ravnini pri  $\lambda = 1$ , kritični lokalni koeficijent izbočenja koji proizlazi iz numeričke analize i teorijskih rezultata iz izraza (17), (28) i (29) prikazani su u tablici 5., a oblik izbočenja na slici 12.

Kao što je to prikazano u tablici 5. i na slici 13., elastični koeficijent rotacije  $\chi_t$  spregnute pojasnice čelik-beton smanjio se povećanjem udaljenosti moždanika sa 100 na 1000 mm, a kritično naprezanje uslijed izbočenja  $\sigma_{kr}$  rezultata numeričke simulacije također se smanjio sa 121,90 na 113,29 MPa. Vrijednost kritičnog naprezanja uslijed izbočenja u slučaju (a) bila je blizu slučaju (b) jer je koeficijent elastičnog pridržanja  $\chi_{tr}$ , koju osigurava kombinirana pojasnica iz slučaja (a), premašio vrijednost od 20, a kritično lokalno naprezanje zbog izbočenja nastoji ostati konstantno nakon što koeficijent elastičnog ograničenja  $\chi$  prijeđe vrijednost od 20.





Slika 12. Oblici izbočenja za različite raspodjele moždanika



Slika 13. Kritično naprezanje uslijed izbočenja hrpta iz numeričke analize i ovog članka ( $\lambda = 1$ )

## 6. Zaključak

U teorijskome istraživanju provedenome u ovome radu ispitano je ponašanje izbočenja hrptova pridržanih pojasnicama u spregnutim nosačima čelik-beton. Na temelju Ritzove varijacijske metode i teorije elastičnog izbočenja ploča predložena je formula za teorijsko rješenje kritičnoga koeficijenta lokalnog izbočenja hrpta izloženog nejednolikome tlaku, a razvijena je i teorijska metoda za izračun koeficijenta elastičnog pridržanja spregnutih pojasnica čelik-beton s različitim raspodjelama moždanika. Kako bi se potvrdila točnost teorijskog modela, provedena je numerička analiza primjenom modela konačnih elemenata.

## LITERATURA

- [1] Alinia, M.M., Moosavi, S.H.: Stability of longitudinally stiffened web plates under interactive shear and bending forces, *Thin-walled Structures*, 47 (2009) 1, pp. 53-60, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2008.05.005>
- [2] Alinia, M.M., Shakiba, M.: Shear failure characteristics of steel plate girders, *Thin-walled Structures*, 47 (2009) 12, pp. 1498-1506, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.06.002>
- [3] Grondin, G.Y., Chen, Q, Elwi, A.E.: Stiffened steel plates under compression and bending, *Journal of Constructional Steel Research*, 45 (1998) 2, pp. 125-148, [https://doi.org/10.1016/S0143-974X\(97\)00058-8](https://doi.org/10.1016/S0143-974X(97)00058-8)
- [4] Wright, H.D.: Local stability of filled and encased steel sections, *Journal of Structural Engineering*, 121 (1995) 10, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1995\)121:10\(1382\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:10(1382))
- [5] Yvan, G., Pierre-Olivier, M.: Presentation Manual of EBPlate, Working document COMBRI/CTICM-xx, DRAFT 1, Liege-11 & 12/07/2006.
- [6] Estrada, I., Real, E., Mirambell, E.: Shear resistance in stainless steel plate girders with transverse and longitudinal stiffening, *Journal of Constructional Steel Research*, 64 (2008) 11, pp. 1239-1254, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2008.07.013>
- [7] Estrada, I., Real, E., Mirambell, E.: A newly developed expression to determine more realistically the shear buckling stress in steel plate structures, *Thin-walled Structures*, 64 (2008) 7-8, pp. 737-747, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2008.01.028>
- [8] Poologanathan, K., Mahen, M.: Elastic shear buckling characteristics of LiteSteel beams, *Thin-walled Structures*, 66 (2010) 11, pp. 1309-1319, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2010.05.005>
- [9] Bedair, O.K.: Influence of in-plane restraint on the buckling behaviour of plates under uniform compression, shear, and in-plane bending, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 148 (1997) 1-2, pp. 1-10, [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00035-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00035-2)
- [10] Qiao, P.Z., Zou, G.P.: Local buckling analysis of elastically restrained fibre-reinforced plastic plates and its application to box sections, *Journal of Engineering Mechanics*, 128 (2002) 12, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:12\(1324\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:12(1324))
- [11] Qiao, P.Z, Shan, L.Y.: Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes, *Thin-walled Structures*, 70 (2005) 4, pp. 468-483, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.09.005>

Zaključci su sljedeći:

- Povećanjem razmaka između moždanika sa 100 na 1000 mm smanjili su koeficijent elastične rotacije  $\chi_t$  spregnute pojasnice čelik-beton, kritično naprezanje uslijed izbočenja (gradijent naprezanja  $\lambda = 1$ )  $\sigma_{kr}$ , te rezultat numeričke simulacije sa 121,90 na 113,29 MPa, što se podudara s rezultatima ovog rada, a stope pogreške bile su < 6 %.
- Kritično naprezanje uslijed izbočenja u slučaju (a) bilo je slično onome u slučaju (b). Razlog za tu pojavu bio je taj što je koeficijent elastičnog pridržanja  $\chi_t$  osiguran kombiniranom pojasnicom iz slučaja (a) premašio vrijednost 20, a kritično lokalno naprezanje uslijed izbočenja nastoji ostati konstantno nakon što koeficijent elastičnog pridržanja  $\chi$  prijeđe vrijednost od 20.
- U usporedbi s vrijednostima iz tradicionalne teorije rezultati pogreške modela razvijenog u ovome radu su pod jednolikim tlakom (gradijent naprezanja  $\lambda \neq 0$ ) i nejednolikim osnim tlakom (gradijent naprezanja  $\lambda \neq 0$ ) bili < 3 %.
- Formula elastičnoga koeficijenta rotacije hrpta u spregnutome nosaču čelik-beton razvijena u ovome radu bila je dovoljno precizna da bi se mogla upotrijebiti pri procjeni izbočenja hrpta u spregnutome nosaču.

## Zahvala

Ovo je istraživanje podržao Opći program prirodoslovne zaklade Guangxi (br. potpore 2020GXNSFAA159150). Svi podaci uključeni u ovo istraživanje dostupni su na zahtjev autora za korespondenciju. Autori izjavljuju da ne postoje sukobi interesa vezani uz objavu ovog rada.

- [12] Pham, C.H., Hancock, G.J.: Shear buckling of thin-walled channel sections, *Journal of Constructional Steel Research*, 65 (2009) 3, pp. 578–585, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2008.05.015>
- [13] Liang, C., Liu, Y., Chen, S., Lu, C.: Study on threshold interfacial shear stiffness of simply supported composite girders, *Engineering Structures*, 1 (2022) 268, pp.114736, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114736>
- [14] Rossi, A., Nicoletti, R.S., de Souza, A.S., Martins, C.H.: Numerical assessment of lateral distortional buckling in steel-concrete composite beams, *Journal of Constructional Steel Research*, 1 (2020) 172, pp. 106192, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2020.106192>
- [15] Śledziewski, K., Górecki, M.: Finite element analysis of the stability of a sinusoidal web in steel and composite steel-concrete girders. *Materials*, 26 (2020) 13, pp.1041, <https://doi.org/10.3390/ma13051041>
- [16] Wijethunge, W.M., Dammika, A.J., Bandara, C.S., Jayasinghe, J.A.: Three-dimensional numerical simulation of lateral distortional buckling behaviour of steel–concrete composite beams, *Engineer*, 56 (2023) 2, pp. 23–35. <https://doi.org/10.4038/engineer.v56i2.7574>
- [17] Araujo, H.F., Andrade Jr., C.M., Basaglia, C., Camotim, D.: Lateral-distortional buckling of steel-concrete composite beams: kinematics, constrained-mode GBT, and analytical formulae, *Journal of Constructional Steel Research*, 192 (2022), pp. 107210, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2022.107210>
- [18] László, P.K.: Local Buckling of Fibre Reinforced Plastic Composite Structural Members with Open and Closed Cross Sections, *Journal of Structure Engineering*, 129 (2003)11, p. 1503, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2003\)129:11\(1503\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:11(1503))
- [19] László, P.K.: Buckling of Unidirectionally Loaded Composite Plates with One Free and One Rotationally Restrained Unloaded Edge, *Journal of Structure Engineering*, 128 (2002) 9, pp. 1202–1211, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2002\)128:9\(1202\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:9(1202))
- [20] Timoshenko, S.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, New York, 1965.
- [21] Chen, J.: *Stability of Steel Structures Theory and Design*, Science Press, Beijing, China, 2008.