

Primljen / Received: 12.9.2018.  
Ispravljen / Corrected: 25.2.2019.  
Prihvaćen / Accepted: 19.5.2019.  
Dostupno online / Available online: 10.8.2019.

# Modeliranje kolosiječnog zastora metodom diskretnih elemenata

## Autori:



**Viktorija Sluganović**, mag. ing. aedif.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
[vgrgic@grad.hr](mailto:vgrgic@grad.hr)



Prof.dr.sc. **Stjepan Lakušić**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
[laki@grad.hr](mailto:laki@grad.hr)



Prof.dr.sc. **Damir Lazarević**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
[damir@grad.hr](mailto:damir@grad.hr)

Pregledni rad

**Viktorija Sluganović, Stjepan Lakušić, Damir Lazarević**

## Modeliranje kolosiječnog zastora metodom diskretnih elemenata

Povećanje osovinskog opterećenja i brzine prometovanja kolosijekom utječe na bržu degradaciju kolosiječne konstrukcije, posebice zastorne prizme. Drobljenje kamenih zrna unutar zastora zbog prevelikih kontaktnih sila među njima, uzrokuje degradaciju u vidu zapunjavanja šupljina što dovodi do slabije odvodnje koja može prouzročiti slom konstrukcije. Optimizacijom učestalosti održavanja i pravilnim oblikovanjem zastora temeljenih na numeričkim i eksperimentalnim postupcima, može se utjecati na proces degradacije zastorne prizme, a time i na ukupne troškove održavanja. U ovom radu prikazane su mogućnosti metode diskretnih elemenata u predviđanju ponašanja kolosiječnog zastora.

### Ključne riječi:

željeznički kolosijek, zastorna prizma, degradacija prizme, numeričko modeliranje, zrnati materijal

Subject review

**Viktorija Sluganović, Stjepan Lakušić, Damir Lazarević**

## Track ballast modelling by discrete element method

An increase in axle load and travel speed causes faster degradation of track structure and, hence, of the ballast prism. Crushing of stone grains in ballast due to excessive contact forces among these grains causes degradation in the form of filling of voids and, in turn, in poorer drainage, which can cause structural failure. The degradation of ballast prism can significantly be reduced, and total maintenance costs can be cut down considerably, by optimizing frequency of maintenance activities and by proper ballast design and shaping based on numerical and experimental procedures. The possibilities of using the discrete element method for predicting track ballast behaviour are presented in this paper.

### Key words:

railway track, ballast prism, prism degradation, numerical modelling, granular material

Übersichtsarbeit

**Viktorija Sluganović, Stjepan Lakušić, Damir Lazarević**

## Modellierung eines gekrümmten Ballastprismas mit diskreten Elementen

Das Erhöhen der Achslast und der Verkehrsgeschwindigkeit auf dem Gleis wirkt sich auf die schnellere Verschlechterung der Gleiskonstruktion, insbesondere des Ballastprismas aus. Das Zerkleinern von Steinkörnern innerhalb des Ballasts aufgrund übermäßiger Kontaktkräfte zwischen ihnen führt zu einer Verschlechterung in Form von Hohlräumen, was zu einer schwächeren Drainage führt, die einen Zusammenbruch der Struktur verursachen kann. Die Optimierung der Wartungshäufigkeit und die ordnungsgemäße Gestaltung von Ballasten auf der Grundlage numerischer und experimenteller Verfahren können den Abbauprozess des Ballastprismas und damit die Gesamtwartungskosten beeinflussen. In dieser Arbeit werden die Möglichkeiten der Methode der diskreten Elemente bei der Vorhersage des Verhaltens des Gleisballasts vorgestellt.

### Schlüsselwörter:

Bahngleis, Ballastprisma, Prismenverschlechterung, numerische Modellierung, körniges Material

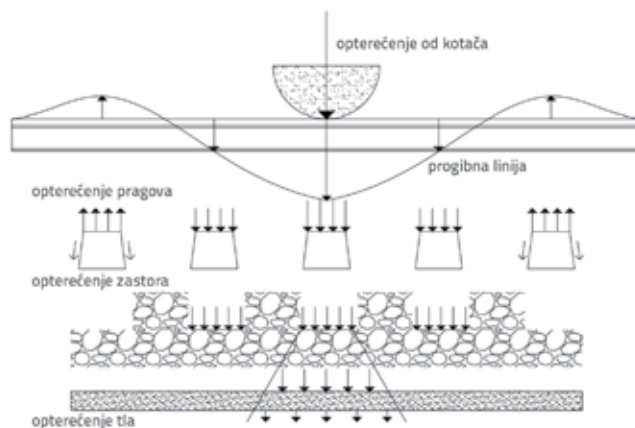
## 1. Uvod

Klasična kolosiječna konstrukcija sastoji se od tračnica, kolosiječnog pričvrsnog pribora, betonskih ili drvenih pragova i zastorne prizme od tucanika, a i danas je u širokoj primjeni diljem svijeta. Dobre karakteristike takve prizme, poput odlične apsorpcije naprezanja i vibracija unutar kamenog materijala, dobra odvodnja, smanjenje i ujednačenje naprezanja na temeljno tlo, dobro ponašanje zbog djelovanja atmosferilija, osiguravanje širine i nivelete kolosijeka, te lako održavanje podbijanjem, konačno i znatno niža cijena od sličnih konstrukcija na čvrstoj podlozi, osiguravaju njezinu još uvijek široku primjenu. Na kolosiječnu konstrukciju pri kretanju tračničkog vozila djeluju velike dinamičke sile [1-3]. Danas u svijetu napredne željezničke uprave troše na održavanje kolosijeka prosječno više od 50.000 EUR/km [4, 5]. Ponašanje zastorne prizme pri djelovanju dinamičkih opterećenja te prijenos opterećenja unutar nje do danas nije potpuno poznato i zbog velike nehomogenosti zastornog materijala i složenosti kontakata među zrnima tucanika. Troškovi održavanja kolosiječne konstrukcije na godišnjoj razini u RH iznose prosječno 150 kuna po metru trase, tj. 20.000 - 30.000 EUR/km. Optimizacija troškova održavanja, u skladu sa stvarnim stanjem kolosijeka, dovela bi do značajnih ušteda.

Željeznički kolosijeci izloženi su sve većim brzinama prometovanja vozila, što uzrokuje zahtjevnije uvjete izgradnje/nadogradnje čitave konstrukcije kako bi se tražene brzine ostvarile. Sve složeniji zahtjevi koji se postavljaju na kolosiječnu konstrukciju zahtijevaju ojačanja i poboljšanja zastorne prizme. Održavanju kolosijeka danas se pristupa na temelju modela troškova uporabnog ciklusa (eng. *Life Cycle Costing*) i numeričke optimizacije, u okviru najpovoljnije strukture sustava za upravljanje održavanjem željezničke infrastrukture (eng. *Railway Maintenance Management System*), prema [6]. Jedna od mogućnosti određivanja degradacije kolosiječne konstrukcije pod opterećenjem je pomoću uređaja kao što je V/TI Monitor (eng. *Vehicle/Track Interaction Monitor*), gdje se primjenom akcelerometara mjere i opisuju dinamička svojstva ponašanja kolosiječnog vozila pri kontaktu s kolosijekom. Na taj je način moguće na pruzi zabilježiti mjesta s nepravilnostima i predvidjeti brzinu propadanja segmenta [7].

Opterećenje od vozila unosi se u kolosijek praktički koncentrirano, preko tračnica, kolosiječnog pričvrsnog pribora, pragova koji rasprostiru opterećenje tračnice na veću površinu i konačno kroz zastornu prizmu na temeljno tlo (slika 1.). Unutar zastorne prizme prijenos opterećenja odvija se putem kontaktnih točaka i ploha među zrnima agregata, pri čemu se dio sile prenosi trenjem. Opterećenje se potom rasprostire na veću površinu, pa je naprezanje kojemu je izloženo temeljno tlo znatno manje od početnog opterećenja. Naprezanje ispod temeljnog tla jednoliko je raspodijeljeno po većoj površini. U tome vidimo značajnu ulogu zastorne prizme i važnosti upotrebe zrnatog materijala za izradu zastora. Kameni materijal nehomogenih je svojstava, a budući da se opterećenje prenosi samo kontaktom među zrnima, važna su njegova dobra svojstva, ali i veličina

zrna. Prijenos opterećenja na podlogu ovisi o veličini kuta pod kojim se opterećenje rasprostire na podlogu, odnosno o kvaliteti zastornog materijala.



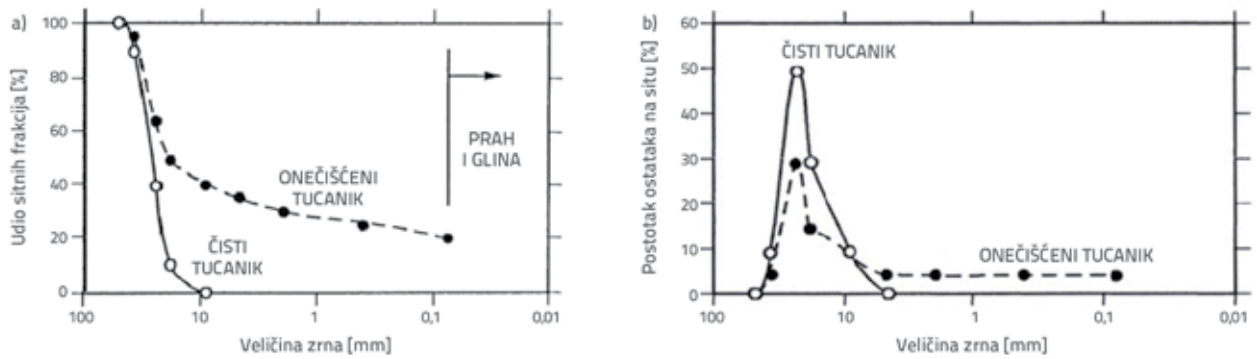
Slika 1. Prijenos opterećenja s kotača kroz kolosiječnu konstrukciju [2]

Jedan od glavnih nedostataka zastorne prizme jest slijeganje, koje je vrlo teško predvidjeti. Osnovni razlozi degradacije prizme su fragmentacija tucanika i trošenje [5]. Na prugama se zato primjenjuju različite metode radi pravodobnog uočavanja i saniranja promjena u visini zastora. Da bi se ojačala kolosiječna konstrukcija i spriječila degradacija zastora, često se upotrebljavaju elastični elementi, poput elastične podloške ispod tračnice i praga [8], primjena gume u zastornom materijalu [9], upotreba adhezivnih elemenata kao vezivnih sredstava u prizmi [10, 11] i elastična podloška ispod zastora na planumu donjeg ustroja [12, 13]. Također, značajna ispitivanja provode se u području geosintetičkih materijala (mreža) koji, zbog uklještenja pojedinih zrna tucanika, utječu na smanjenje pomaka i ukupno slijeganje prizme. Područja na pruzi koja su osobito ugrožena su križanja u razini, horizontalne krivine malog radijusa, prijelazna područja u blizini mostova, propusta i tunela, sastavi tračnica i druge takozvane slabe točke kolosijeka [2]. Periodi održavanja kolosiječne konstrukcije, osim prometnog opterećenja svakako ovise i o kvaliteti tucaničkog materijala.

## 2. Degradacija zastorne prizme

### 2.1. Svojstva agregata

Veličina zrna tucanika, prema sadašnjoj europskoj normi [14], treba iznositi od 31,5 mm do 63 mm, pri čemu udio čestica manjih od 5 mm ne smije biti veći od 1 % po masi tucanika [4, 14]. Navedeni zahtjevi postavljaju se na zastornu prizmu kako bi ona zadržala potrebna svojstva nosivosti. Prije ugradnje u kolosiječnu konstrukciju, kameni materijal prolazi opsežna ispitivanja kvalitete. Između ostaloga, ispitivanja granulometrijskog sastava, indeksa plosnatosti, indeksa oblika, duljine zrna, gustoće, upijanja vode, otpornosti na drobljenje (Los Angeles ispitivanje), otpornosti na trošenje itd. Radi boljeg uklještenja među zrnima i osiguranja zahtijevane nosivosti



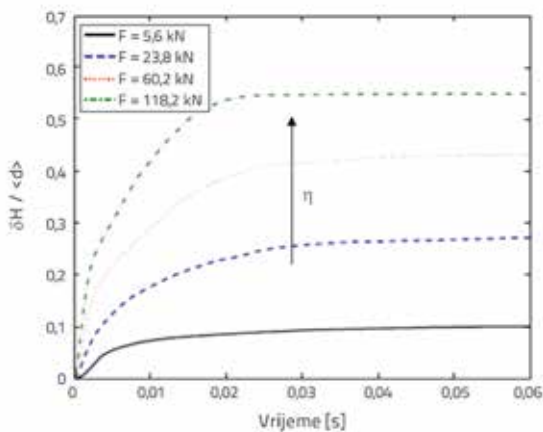
Slika 2. Udio sitnih frakcija i postotak zadržavanja čestica na situ kod čistog i onečišćenog tucanika [2]

na dinamička opterećenja u uzdužnom i poprečnom smjeru, prednost imaju poliedarska zrna tucanika u odnosu na zaobljena zrna (valutice). Tijekom procesa podbijanja, ali i zbog prolaska željezničkih vozila, zrna tucanika se zaobljuju, rubovi se lome, jer su izloženi najvećem opterećenju, čime opada sposobnost uklještenja [10, 15].

Granulometrijski sastav materijala prizme vrlo je važna značajka u prijenosu opterećenja. Tijekom vremena dolazi do otkidanja i lomljenja zrna, a zbog toga i do slabljenja nosivosti prizme. Na slici 2. možemo vidjeti udio sitnih frakcija i postotak zadržavanja na situ kod novog čistog tucanika i kod tucanika tijekom uporabe [2]. Možemo uočiti značajno povećanje količine sitnih frakcija unutar agregata u uporabi, primjerice udio zrna veličine 0,1 mm čak je i više od pet puta veći od onoga u čistom agregatu. Manje čestice ne mogu jednako dobro prenositi veliko opterećenje, pa jednom kada je dosegnuta kritična granulometrija agregata dolazi do ubrzane degradacije..

### 2.2. Degradacija i onečišćenje zastora

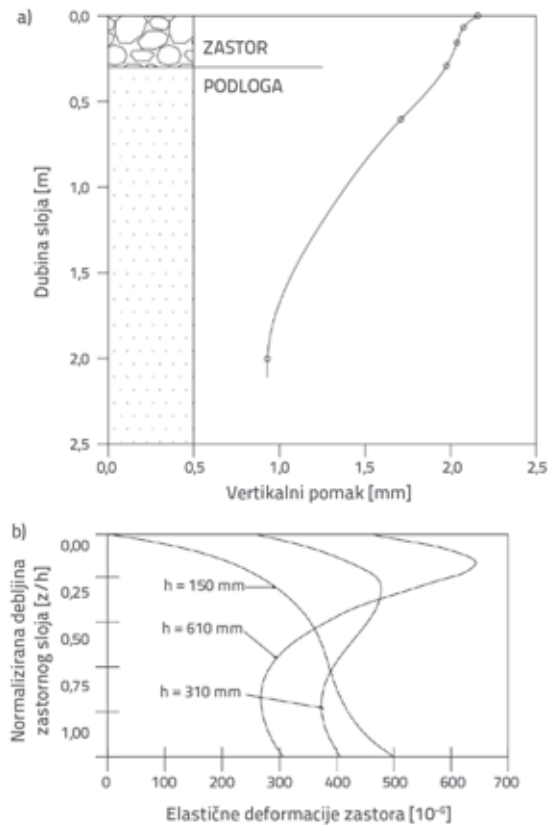
Slijeganje zastora nastaje zbog nedovoljne nosivosti materijala, velikih opterećenja, utjecaja atmosferičkih, nepovoljne granulometrije tucanika, ali u konačnici je slijeganje zastora funkcija osovinskog opterećenja.



Slika 3. Slijeganja s obzirom na porast opterećenja [12]

Na slici 3. vidljiv je porast veličine slijeganja zastora u funkciji vremena, s povećanjem osovinskog opterećenja od 5,6 kN do 118,2 kN [16]. Slijeganjem tucaničkog sloja nastaje poremećaj u vertikalnoj geometriji kolosijeka, što utječe na sigurnost prometovanja i udobnost vožnje [16].

Kolosiječna konstrukcija opterećena je cikličnim opterećenjem, a otkazivanje pri cikličnom opterećenju iznenadno je i događa se pri manjim opterećenjima u odnosu na statička. Ponašanje konstrukcije pri dinamičkom opterećenju je složeno i ovisi o puno čimbenika, poput stanja i povijesti naprezanja, a kod zrnatog materijala ovisi i o vanjskim uvjetima [2].



Slika 4. a) Vertikalni pomaci s porastom dubine kolosiječne konstrukcije; b) naprezanja unutar zastorne prizme s promjenom dubine [2]

Radi razumijevanja ponašanja konstrukcije pri cikličnom opterećenju, važno je najprije proučiti ponašanje pri statičkom opterećenju. Jedno od glavnih svojstava zastorne prizme jest način prenošenja i rasprostiranja opterećenja na podlogu, pri čemu su naprezanja na podlozi znatno manja od naprezanja u zastornom sloju. Smanjenje naprezanja posljedica je trenja među zrnima koje preuzima veliki dio opterećenja. Na slici 4.a prikazani su pomaci zastorne prizme i temeljnog tla (podloge). Prikazana su i naprezanja unutar slojeva. Vidljivo je veće naprezanje i manji progib zastornog sloja. Budući da krući zastorni sloj leži na mekšem sloju temeljnog tla, na slici naprezanja vidimo promjenu nagiba krivulje u kontaktnoj ravnini temeljnog tla i zastora, [2]. Prijenos opterećenja na podlogu predstavlja zanimljiv predmet istraživanja znanstvenicima diljem svijeta od najranijih dana željeznice, a danas se aproksimira prema različitim autorima [5, 17].

Raspodjela naprezanja unutar zastorne prizme ovisi i o njezinoj debljini, što je na slici 4.b prikazano za debljine od 15 cm, 30 cm i 61 cm. Analiza naprezanja za različite debljine zastorne prizme vrlo je važna pri razvoju metoda za predviđanje slijeganja kolosiječne konstrukcije. Promjena volumena pri cikličnom opterećenju uzrokuje deformacije unutar zastornog sloja zbog preraspodjele zrna tucanika čime se dobiva gušća struktura. Pri tome nastaje lomljenje tucanika, a manja zrna ulaze u šupljine među većim zrnima. Lomljenje zrna uzrokuje povećane kontaktne sile među zrnima, ali i ciklusi smrzavanja i odmrzavanja te kemijska djelovanja iz okoline. Slijeganje zastorne prizme nastaje i zbog dodatnih vibracija pri opterećenju vozilom zbog utjecaja na preraspodjelu zrna tucanika i pomicanje tucanika. U kolosijeku nakon određenog niza godina i prolaza određene količine opterećenja dolazi do zapunjavanja zastorne prizme sitnijim česticama, zbog loših svojstava podloge, što uzrokuje lošu odvodnju i dovodi do izraženih plastičnih pojava unutar zastora. Utjecaj zapunjavanja prizme najviše se očituje pri održavanju podbijanem kada sitnije čestice padaju na dno prizme. Na njih tada naliježe ostatak tucanika pa prijenos na podlogu nije dovoljno dobar i naprezanja zadržavaju visoki iznos. Udio odlomljenog tucanika utječe na deformiranje i čvrstoću zastornog materijala i na cjelokupno ponašanje kolosiječne konstrukcije. Lomljenje tucanika odvija se u kontaktnim točkama među zrnima, a s vremenom, uz porast opterećenja dolazi i do otkidanja velikih dijelova kamena. Ono pridonosi diferencijalnom slijeganju kolosijeka i poprečnoj deformaciji, budući da ni bočna otpornost nije dovoljno dobra [4]. Pokazatelj fragmentarnosti jest koeficijent Los Angeles (LAA). Pomoću njega je moguće odrediti čvrstoću agregata i vjerojatnosti loma, tj. fragmentacije ispod pragova.

Dužina trajanja i degradacija zrna agregata unutar prizme znatno ovise o postupku podbijanja prilikom uobičajenog održavanja kolosijeka [18]. Proces podbijanja kolosijeka provodi se radi vertikalne nivelacije kolosijeka na projektiranu visinu, zatim radi boljšeg razmještanja zrna i zapunjenja praznog prostora ispod praga te radi dobrog prijenosa opterećenja s praga u zastornu prizmu. Preraspodjela zrna uzrokuje novo trošenje tucanika i

lomljenje, što ubrzava proces degradacije i smanjuje njegovo trajanje. Zapunjavanje prizme jedan je od glavnih uzroka pogoršanja, slijeganja zastorne prizme, ali i smanjenja utjecaja podbijanja, odnosno smanjenja trajnosti učinka podbijanja [19]. Zbog svega nastoji se ispravno odrediti cikluse održavanja, kako bi se manjom učestalošću smanjili troškovi održavanja prizme i smanjenja habanja podbijanem. Cilj je izraditi numeričke modele slijeganja tucanika kojim je moguće predvidjeti njegovo slijeganje. U skladu s modelom moguće je odrediti podbijanje tucanika u optimalnom razdoblju.

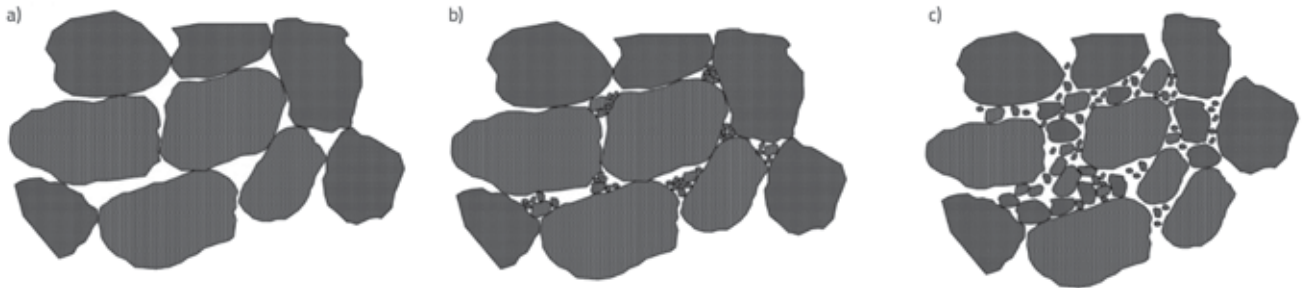
### 3. Primjena metode diskretnih elemenata na numeričko modeliranje zastorne prizme

Slijeganje tucanika nastaje zbog preraspodjele zrna uzrokovane cikličnim opterećenjima i drugim utjecajima. Ono uzrokuje smanjenje sigurnosti i udobnosti vožnje, a korekcija kolosiječne konstrukcije zahtijeva uporabu skupe opreme. Zbog toga se danas nastoji izraditi numeričke modele kojima možemo unaprijed procijeniti ponašanje prizme [16].

Ono što želimo postići numeričkim modeliranjem eksperimentalnim, laboratorijskim ili terenskim ispitivanjima, jest predviđanje ponašanja zrna agregata unutar prizme. Ako je moguće unaprijed predvidjeti djelovanje unutar prizme, tada možemo jednostavnije odrediti kritična mjesta na kolosijeku (važna zbog održavanja), pa se takva mjesta mogu izvesti s određenim "pojačanjima". Cilj proučavanja ovoga problema jest postizanje projektirane zastorne prizme tako da se unaprijed utvrdi ponašanje i prijenos sila te u skladu s time odrede karakteristike zrna. Zbog diskretne prirode agregata, često nije dovoljno promatrati taj dio kolosijeka kao kontinuum, nego treba primijeniti diskontinuum. Suprotno problemima mehanike kontinuuma (koji se opisuju diferencijalnim jednadžbama), problemi mehanike diskontinuuma opisuju ponašanje i interakcije među česticama. Uporaba računala je prijeko potrebna za rješavanje takvih problema [20].

Radi praćenja ponašanja zastora i učinka različitih postupaka dugotrajnog poboljšanja stabilnosti, provode se različiti načini monitoringa [21] i numeričkog modeliranja kojima se kontrolira i predviđa njegovo ponašanje. Ponašanje prizme izrazito je nelinearno i ovisi o više čimbenika, a proračuni se izvode s određenim pojednostavljenjima. Položaj zastorne prizme i posteljice u klasičnoj kolosiječnoj konstrukciji relativno je daleko od kontaktne površine između kotača i tračnice gdje nastaju dinamičke sile zbog nepravilnosti na voznoj površini kotača i gornjem rubu tračnice.

Radi procjene ponašanja prizme i trajanja kolosiječne konstrukcije, u novije vrijeme se provode složenije numeričke analize. Rezultati numeričkog modeliranja kolosijeka nisu provedeni zbog slabog poznavanja zakonitosti među zrnima. Ograničavajući faktor postupaka je i vrijeme potrebno za proračun konstrukcije. Taj faktor značajno utječe na izbor oblika zrna, zakonitosti ponašanja među zrnima, volumen područja koje se modelira i slično. Radi smanjenja trajanja proračuna,



Slika 5. Stanje zrna tucanika tijekom uporabe: a) čisti novi tucanik; b) tucanik s malom količinom sitnije frakcije; c) tucanik s više sitnijih frakcija [23]

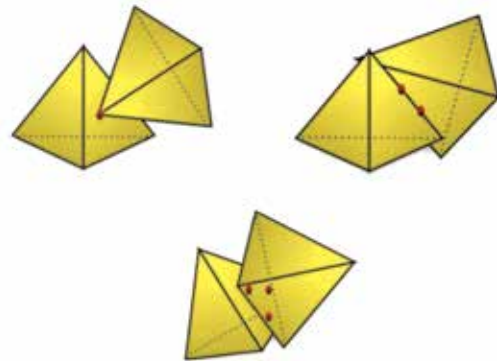
uvode se daljnje pretpostavke koje utječu na točnost rezultata. Najčešći postupak modeliranja tucaničke zastorne prizme temelji se na metodi diskretnih elemenata kojom možemo modelirati diskretnu prirodu zrnatih materijala, [22]. U nekim modelima prizme prema metodi diskretnih elemenata, zrna tucanika promatraju se kao apsolutno kruta, a posebna se pozornost pridaje kontaktnim silama među zrnima.

### 3.1. Numerički modeli zrna i kontakta

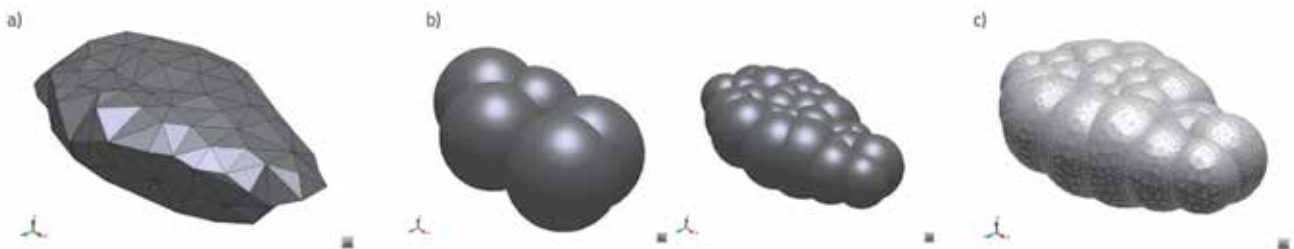
Istraživanja metodom diskretnih elemenata (eng. *Discrete Element Method* - DEM) koja su proveli Liu i dr. [23], pokazala su da oblik zrna značajno utječe na ponašanje tucanika. DEM modeliranjem može se dobiti uvid u prikladan oblik zrna, a moguće je odrediti i najpogodniji oblik za ugradnju u kolosiječnu konstrukciju. Prema različitim autorima, zrnati se materijal modelira poliedarskim konveksnim elementima [24], ili jednostavnije kuglastima. Primjenjuju se i grozdovi kugli koji dobro prikazuju stvarno ponašanje tucanika [25]. Kugle omogućavaju brži proračun s obzirom na brže traženje susjeda i jednostavnije definiranje dodirnih ploha. Bez obzira na prvotnu jednostavnost takvih modela, danas su modeli uz primjenu kugli postali znatno složeniji. Kamena zrna prikazuju se kao nakupine takvih elemenata, pa je traženje i ponašanje kontakata postalo složenije. U skladu s time, moguć je i realističniji model ponašanja materijala prizme. Modeliranje poliedarskim elementima znatno je složenije i zahtijeva dugotrajan proračun. Prema [24], veća posmična čvrstoća prizme modelirane poliedarskim elementima u odnosu na kugle prouzročena je anizotropnim svojstvima i boljim međusobnim uklještenjem elemenata. Ponašanje tucanika dobro prikazuju i nakupine kugla, pri čemu se pojedini element sastoji od dva, četiri ili osam elemenata [26]. Istraživanja su pokazala da prizme s izduženim i plosnatim zrnima tucanika ne pokazuju

dobre rezultate pri opterećenju [27]. Pojedini istraživači uzimaju u obzir i lomljenje zrna. Ovakav pristup predstavlja značajan pomak prema realnijem prikazu ponašanja zrna, budući da je lomljenje zrna jedan od osnovnih razloga degradacije kolosijeka. Pri tome kvaliteta agregatnog materijala ima značajnu ulogu. Lomljenje zrna modelira se najčešće na dva načina: primjenom višedijelnih elemenata koji su pričvršćeni na element zrna, pa se zbog prekoračenja zadanog maksimalnog naprezanja unutar sloja se odlamaju te primjenom maksimalnog naprezanja koje uzrokuje dijeljenje elementa na segmente. Na slici 5. prikazano je stanje unutar modela zastorne prizme zbog lomljenja koji je određen primjenom programa PFC 3D [28].

Pri izradi modela posebno se uzima u obzir modeliranje kontaktnih ploha i ponašanje kontakta među elementima, odnosno prijenos opterećenja. Kad se primjenjuju poliedarski elementi, oblici kontakta određeni su na četiri moguća načina: vrh-ploha (jedna dodirna točka), rub-rub, ploha-ploha (tri dodirne točke) i rub-ploha (dvije dodirne točke); slika 6. [24]. Kontakt ploha-ploha, pri čemu je kontakt definiran preko tri točke, predstavlja najčvršću vezu.



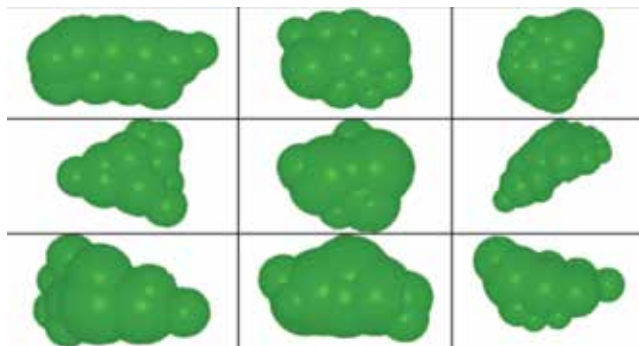
Slika 6. Vrste dodirnih točaka i ploha među poliedarskim elementima [19]



Slika 7. a) Triangulacija čestice; b) ista čestica sastavljena od 5 i 34 kugle; c) tetraedarska mreža kuglaste čestice [24]

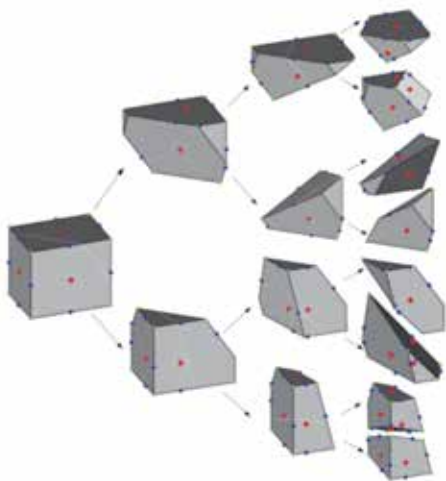
S porastom broja kugli, realističnije je prikazano ponašanje zrna jer se može postići veća hrapavost. Proizvoljni oblik poliedarske čestice moguće je zamijeniti kuglama koje približno ocrtavaju oblik zrna i daju dovoljno dobre rezultate uz kraći proračun; slike 7. i 8. [25, 29].

Važan proces koji se odvija u kamenom materijalu jest fragmentacija oslabljenih dijelova prizme [29]. Fragmentacija heterogenog krhkog materijala pojavljuje se u različitim vremenskim razmacima, a može biti prouzročena starenjem zbog djelovanja atmosferilija i zbog naglog pucanja kamena.



Slika 8. Modeli zrna tucanika [25]

U računalnom programu EDEM poliedarski elementi dijele se na manje poliedarske elemente hrapavih rubova, neovisno o tome je li lom nastao zbog djelovanja atmosferilija tijekom vremena ili naglim lomom elementa zbog opterećenja većeg od maksimalnog (slika 9.).



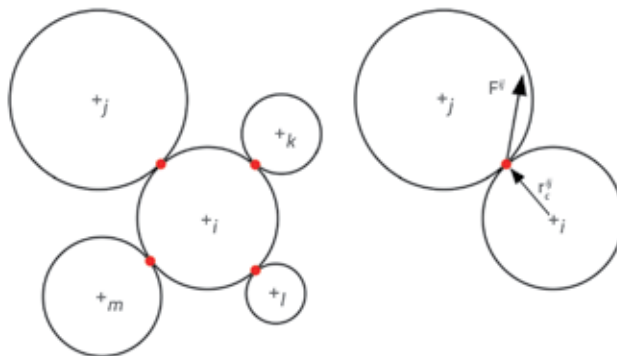
Slika 9. Model fragmentacije poliedarskog elementa [31]

Pri tome se lom odvija duž ravnine loma elementa koja prolazi sredinom masa elementa, a mase su nastalih dijelova jednake. Dio elementa na kojemu će se provesti fragmentacija bira se s obzirom na duljinu ruba duž kojega može nastati lom. Jedan od razloga zašto se za ovakve probleme primjenjuje metoda diskretnih elemenata jest i taj što se kontakti čestica

u numeričkom modelu stalno mijenjaju. Ako bi se provjeravao kontakt između svih čestica u pakiranju, moglo bi se znatno produljiti vrijeme proračuna [30]. Mehanizam loma tucanika može se zadati putem algoritma u kojem se poliedarski elementi uvijek lome na dva dijela uzduž ravnine koja prolazi sredinom mase elementa, pri čemu je oblik elementa proizvoljan [31].

### 3.2. Modeli kontaktnih sila

Međudjelovanja čestica kamenog materijala, njihovi pomaci, zaokreti i prijenos opterećenja ovise o zakonitostima kontakta među česticama. Česti kontaktni modeli koji se koriste za prikazivanje i određivanje zakonitosti kontakta među česticama u DEM su: linearni, Hertzov i Hertz-Mindlinov model. U nastavku su prikazane osnovne jednačbe kontaktnih djelovanja.



Slika 10. Kontaktno djelovanje između sfera [20, 28]

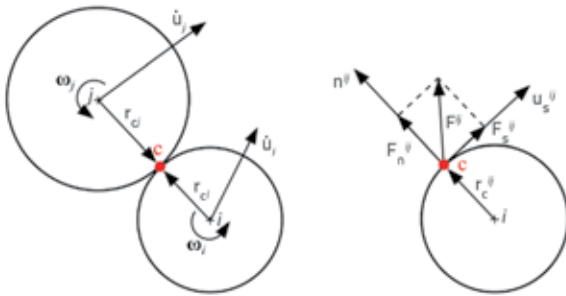
Na slici 10. prikazane su čestice u kontaktu i sila međudjelovanja. Najviše vremena pri proračunu DEM metodom troši se na pretraživanje kontakata. Najjednostavnije određivanje interakcije temelji se na provjeri kontakta svake sfere sa svakom. Budući da je takav pristup iznimno vremenski zahtjevan, postoje brojni algoritmi kojima se smanjuje opseg pretraživanja [25]. Kada se odredi kontakt između dviju čestica (elemenata), izračunavaju se sile u kontaktnim točkama. Kontakt između dviju sfera koje su u interakciji možemo zapisati kao:

$$F^{ij} = - F^{ji} \tag{1}$$

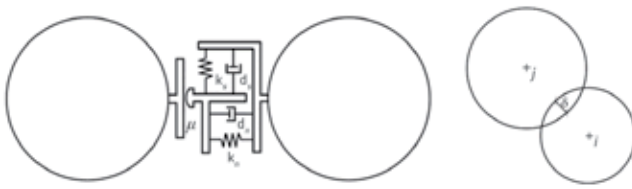
gdje sila  $F^{ij}$  ima normalnu  $F_n^{ij}$  i tangencijalnu komponentu  $F_s^{ij}$ . Prema tome slijedi:

$$F^{ij} = F_n^{ij} + F_s^{ij} = F_n n^{ij} + F_s^{ij} \tag{2}$$

gdje je  $n^{ij}$  jedinični vektor okomit na površinu čestice u kontaktnoj točki između čestica  $i$  i  $j$ . Taj jedinični vektor leži na pravcu središta dviju čestica, a usmjeren je izvan čestice, slika 11. Kontaktno djelovanje  $F_r$ ,  $F_{s1}$  i  $F_{s2}$  određene su konstitucijskim modelom kontakta među česticama. Uobičajeni lokalni modeli materijala koji se upotrebljavaju u DEM-u opisani su u [25].

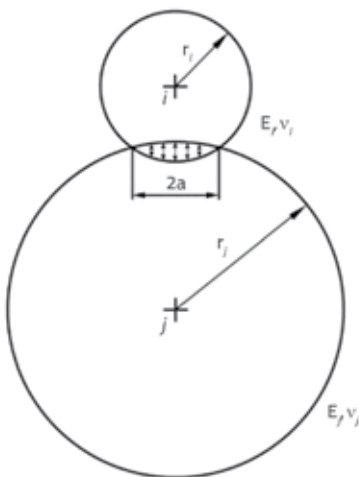


Slika 11. Rastavljanje kontaktne sile na normalnu i tangencijalnu komponentu [28]



Slika 12. Kontaktni model: a) standardni [32]; b) prodiranje [25]

Hertzov kontaktni model, predstavljen na slici 12, uzima u obzir zakrivljenost kontaktnih površina. Kada jedno tijelo dodirne drugo, kontaktna se točka deformira, ali je kontaktna površina vrlo mala u odnosu na dimenzije tijela. Oblik i povećanje površine te raspodjela naprezanja po području određeni su geometrijom kontaktnih tijela i opterećenjima. Takav kontaktni model može se primijeniti samo u slučajevima statičkog opterećenja ili kada je udarna brzina vrlo mala. Ograničenja udarne brzine ovise o gustoći i Youngovom modulu elastičnosti materijala, kojima su definirani kriteriji za određivanje maksimalne udarne brzine koja vrijedi za Hertzov model. Ako imamo dvije sfere radijusa  $r_1$  i  $r_2$ , kontaktna površina je krug radijusa  $a$ , kao što je prikazano na slici 13.



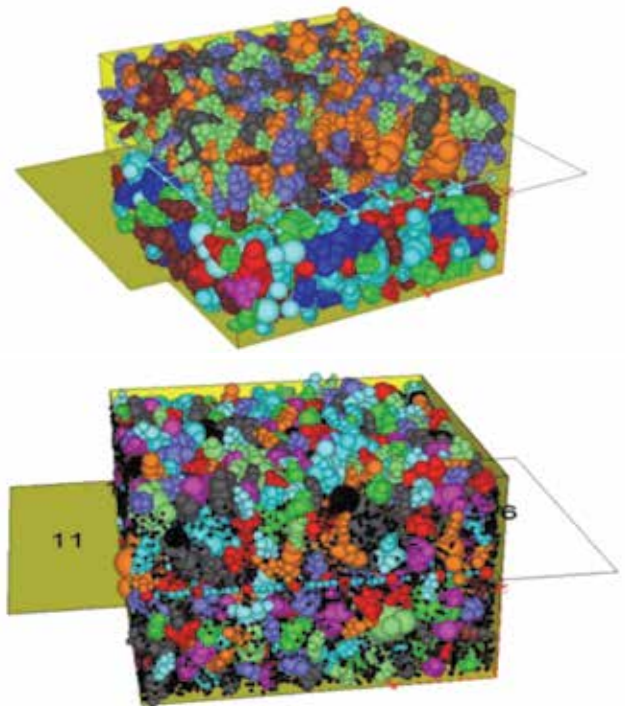
Slika 13. Shema Hertzovog kontaktnog modela [20]

Linearnoelastični kontaktni model rjeđe se upotrebljava od Hertzova i Hertz-Mindlinova modela, budući da je u slučaju

modeliranja ponašanja čestica kamenog materijala bitno u obzir uzeti i dobar oblik čestice, što Hertzov i Hertz-Mindlinov model bolje predstavljaju [33]. Hertz-Mindlinov model kombinacija je Hertzovog i Mindlinovog modela gdje se Hertzova teorija primjenjuje u normalnom, a Mindlinova poboljšana metoda u poprečnom smjeru. Takvu kombinaciju u DEM-u prvi su upotrijebili Di Renzo i Di Maio [34].

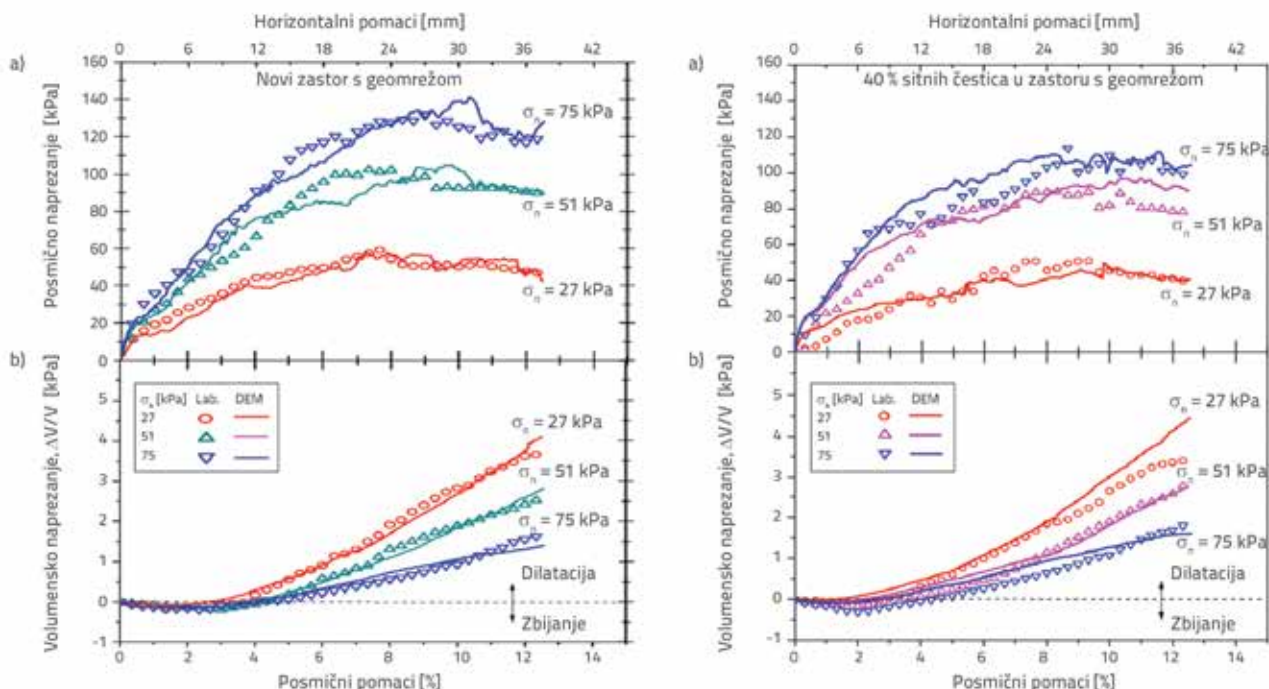
### 3.3. Primjena metode diskretnih elemenata u analizama zastora

Prema [35], usitnjavanjem kamenog materijala, broj kontakata među zrnima značajno raste, a veličina kontaktnih sila opada. Pretpostavljeni uzrok je elastično ponašanje sitnijih zrna koja oblažu površinu tucanika i smanjuju iznos kontaktnih sila, čime se smanjuje degradacija zrna. Numeričkim proračunima nastoji se ispitati i utjecaj različitih ojačanja u kolosijeku, te odrediti mogućnost primjene. Jedno od istraživanja odnosi se na ispitivanje ugradnje geomreža u zastornu prizmu, slika 14., [29, 30, 36].



Slika 14. Modeli novog tucanika (gore) i tucanika s velikim udjelom sitnijih zrna (dolje), uz primjenu geomreže [25]

Primjenom geosintetika, geomreža i gumenih podzastornih podloški znatno se može poboljšati nosivost i trajnost klasične kolosiječne konstrukcije s tucanikom [35]. Rezultati numeričkih modela tucanika u koji je ugrađena geomreža, ovisno o stanju zapunjenosti zastorne prizme (puno ili malo sitnog agregata), pokazuju dobro podudaranje s rezultatima eksperimenata, što je prikazano na slici 15. [29].



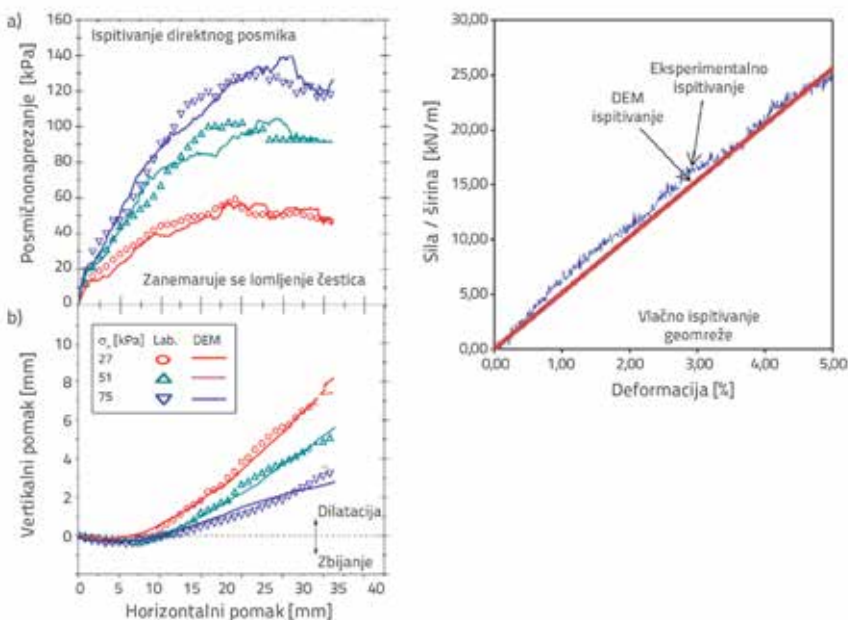
Slika 15. Rezultati posmičnog naprezanja i volumenske deformacije dobiveni eksperimentalno i numerički za: a) novi tucanik; b) tucanik s velikim udjelom sitnijih čestica (VCI 40 %) [29]

Prijenos opterećenja u zastornom sloju ovisi o raspodjeli kontaktnih sila među zrnima. Posmična naprezanja, vertikalni pomaci i usporedba rezultata DEM modela i rezultata eksperimenata za model zastora različite zapunjenosti ojačane geomrežom prikazani su na slici 16.

S napretkom metode diskretnih elemenata napravljena su i složena ispitivanja. Primjerice, provedeno je *pull-out* modeliranje geomreže iz tucanika za različite oblike i složenost zrna [37]. Novost pri ispitivanju jest konzistentno integranje kontaktnih sila za rubne pomake, pri čemu se u obzir uzima i klizanje kontaktne točke po vanjskom rubu.

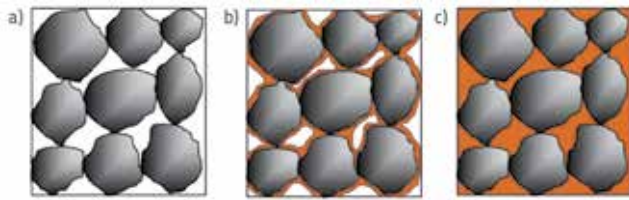
Značajan utjecaj na ponašanje tucanika ima količina sitnog odlomljenog kamenog materijala. Na slici 17. prikazan je model tucanika različitog stupnja onečišćenosti: od potpuno čistog do onečišćenog (zapunjene su sve šupljine među zrnima). Na temelju količine zapunjenog materijala određuje se sposobnost tucanika za daljnji prijenos opterećenja i djelovanje unutar konstrukcije.

Predviđanja ponašanja tucaničkog materijala ugrađenog u zastornu prizmu pomoću DEM modela daju dobre rezultate, u skladu s mjerenjima na terenu i u laboratoriju. Zanimljiva je usporedba rezultata ispitivanja i različitih DEM modela tucanika razvijenih na Sveučilištu Illinois, ovisno o granulometriji agregata, obliku zrna, teksturi i kutnosti, (slika 18.) [27].

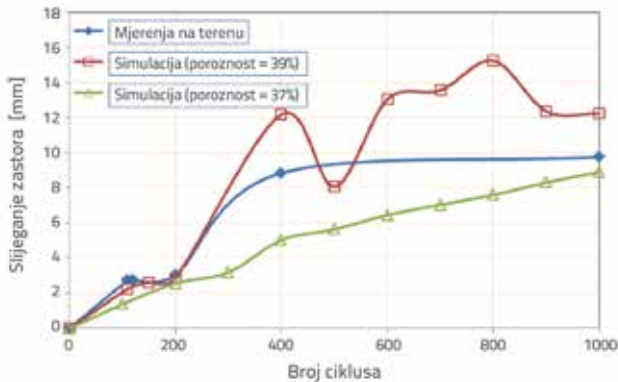


Slika 16. Usporedba rezultata naprezanja i vertikalnog pomaka dobivenih DEM simulacijom i eksperimentalnim ispitivanjem novog tucanika te ispitivanje svojstava otpornosti geomreža [34]





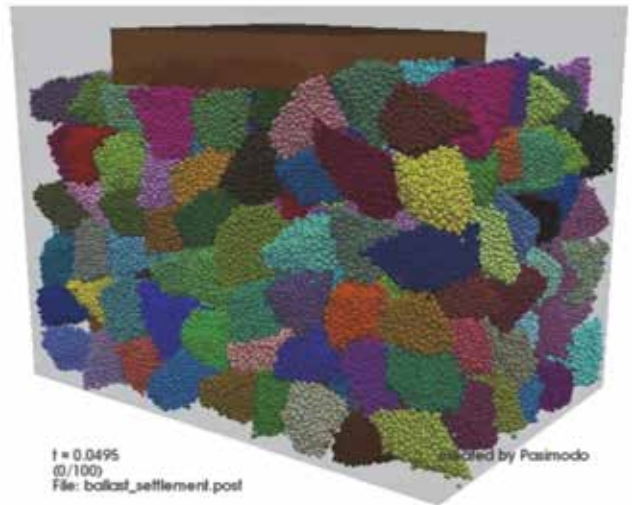
Slika 17. Shematski prikaz tucanika: a) čistog; b) djelomično onečišćenog; c) posve onečišćenog [15]



Slika 18. Izmjereni i predviđeni rezultati slijeganja zastora [27]

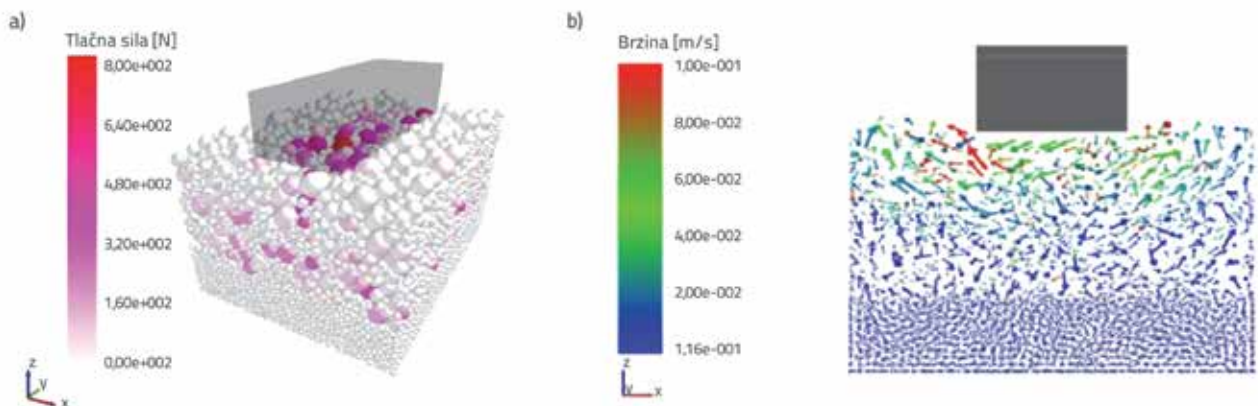
Prednost numeričkog modeliranja, poznavanja djelovanja i opterećenja unutar zastorne prizme daju mogućnost boljšeg predviđanja ciklusa održavanja podbijanjem. Prema istraživanju podbijanja zastorne prizme provedenom na DEM modelu u [38], pokazano je da je 35 Hz optimalna frekvencija podbijanja, jer je pri toj frekvenciji odlamanje najmanje. Nova DEM metoda pomoću koje se mogu simulirati nepravilni elementi tucanika predstavljena je u radu [39]. Temelji se na površinskim i unutarnjim čvorovima mreže stvarnih zrna tucanika. U navedenom radu istraživači su proučavali dva najvažnija faktora pri modeliranju nepravilnih čestica: gustoću čvorova mreže na površini i u unutrašnjosti mreže. Upotrebljavaju se i optimizacijski algoritmi (eng. *binary tree*) radi određivanja minimalne udaljenosti među zrnima. U ovoj metodi, faktori utjecaja obuhvaćaju gustoću mreže i Rlim. Broj površinskih i unutarnjih čvorova mreže utječe

na učinkovitost modeliranja. Pri tome je broj kugli većinom određen unutarnjom mrežom. Prikladna unutarnja mreža i vrlo precizna površinska mreža potrebne su radi optimalnog iskorištenja računalne podrške, [39]. Model kolosiječne konstrukcije za ispitivanje ponašanja tucaničkog materijala u kojemu su zrna tucanika prikazana kao grozdovi kugli, a opterećenje je nanoseno putem praga, izradili su istraživači u [40], što je prikazano na slici 19.

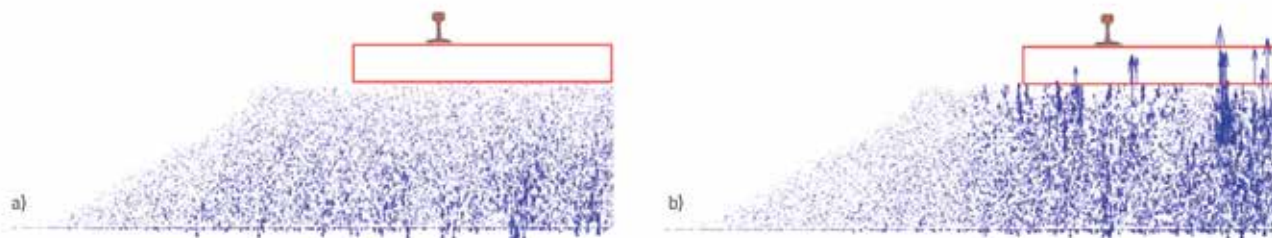


Slika 19. Model zastorne prizme na koju djeluje opterećenje praga [38]

Prema [23], primjenom DEM moguće je dobro procijeniti pomake i slijeganje tucanika unutar prizme. Ponašanje zrna tucanika ispod pragova najbolje se vidi iz vektorskog prikaza brzina unutar prizme pri cikličnom dinamičkom opterećenju. Na slici 20. vidljiva je aktivnost zrna pri opterećenju, [41]. Model kontaktnih sila kojim se može prikazati ponašanje tucanika pri troosnom ispitivanju predstavljen je u [42]. Pokazano je da dio oštećenja nastaje na kontaktu među česticama. Budući da takvo ponašanje zrna nije bilo moguće prikazati klasičnim Hertzovim kontaktom, na mjestima kontakta uvedeni su novi (manji) elementi kojima se modelira hrapavost površine kuglastih nakupina (eng. *asperities*). Dodatni elementi



Slika 20. Aktivnost zrna pri opterećenju zastorne prizme (trajanje 3 s): a) Raspodjela tlačnih sila; b) Raspodjela vektora brzina, [39]



Slika 21. Vektorski prikaz kontaktnih sila unutar modela prizme: a) bez rotacije pragova, b) s rotacijom pragova [41]

izrađeni su kao kuglom zatvoreni stošci, a kontakt je elastičan (Hertzov). Do loma elementa dolazi ako se prekorači granica popuštanja, [42].

Budući da je ponašanje prizme vrlo složeno, u novije vrijeme nastoje se u obzir uzeti i neki složeniji učinci, poput utjecaja zakretanja praga, prema istraživanju na Pennsylvania State sveučilištu [43], u kojemu je primijenjen model s pragovima modeliranim konačnim, a tucanika diskretnim elementima. Napravljen je trodimenzijski model kolosiječne konstrukcije i prizme primjenom BLOCKS3D softverskog paketa. Na slici 21. vidimo vektorski prikaz brzina čestica unutar modela prizme, pri čemu uočavamo povećano gibanje modela zrna uz prag. Povećanje kutnog ubrzanja može prouzročiti opterećenje dodatnim momentom do 5 kN, čime se znatno ubrzava degradacija zastorne prizme i smanjuje trajanje tucanika [43]. Očito, pomaci praga mogu prouzročiti dodatni moment koji utječe na zapunjavanje kolosijeka sitnijim česticama zbog lomljenja tucanika, što skraćuje uporabljivost i povećava troškove održavanja konstrukcije. Možemo zaključiti da bi bilo zanimljivo razmotriti i djelovanja ostalih elemenata kolosiječne konstrukcije na zastornu prizmu.

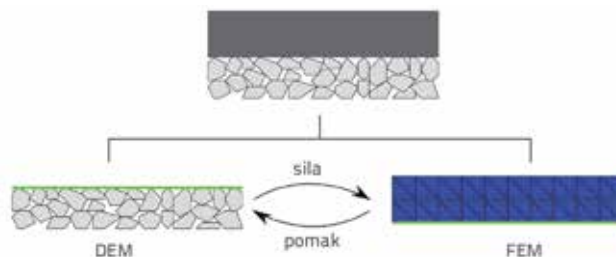
Ispitivanje mješovitom DEM-FDM metodom proveli su Ngo i sur., [44], pri čemu je temeljno tlo modelirano FDM metodom (metoda konačnih razlika), a zastorna prizma DEM metodom. U navedenom modelu veza između DEM i FDM područja odvija se elementima na spoju područja, pri čemu se diskretnim elementima prenose sile kao ulazni podaci za metodu konačnih razlika, kojom se dobivaju pomaci koji se zatim vraćaju u DEM. Navedeno istraživanje, [44], pokazalo je da se lom veza u zastornom materijalu povećava s povećanjem frekvencije ( $f = 15\text{--}30\text{ Hz}$ ).

Također, raspodjela naprezanja unutar zastorne prizme nije jednolika, a najveće naprezanje nastaje ispod praga. Rezultati su dobiveni DEM modelima, a područje najvećeg naprezanja podudara se s mjestom koje sadrži najveći broj popucalih kontaktnih veza među modelima zrna. Pouzdanost FEM-DEM modela potvrđena je dobrim podudaranjem numeričkih i eksperimentalnih rezultata ispitivanja, [44]. Na prijenos opterećenja unutar prizme utječe i temeljno tlo, jer djeluje na povećanje naprezanja unutar prizme, što se u DEM modelu očituje pucanjem kontaktnih veza [44]. Do pucanja dolazi jer na mjestu kontakta sile prekorače nosivost materijala, pa i prijenos opterećenja po kontaktu ili kontaktom više nije

moгуć. Prema FEM - DEM modelu [45], slijeganje praga u vertikalnom smjeru nastaje zbog preraspodjele čestica tucanika i slijeganja podloge. Ponašanje tucanika kroz dulje razdoblje još uvijek nije u potpunosti poznato, zbog dugotrajnih proračuna čak i jednostavnijih modela ponašanja zrna kao krutih tijela. Prilikom izrade FEM - DEM modela, posebnu pozornost treba obratiti na vezu između dijelova modela izrađenih različitim metodama. Tako prema Shao i dr. [45], kontaktne sile određene DEM metodom u zastornom dijelu predstavljaju vanjske sile za FEM metodu. Deformacije koje se izračunaju FEM-om predstavljaju rubne uvjete za DEM. Budući da vanjske sile koje djeluju na FEM model trebaju biti postavljene u čvorovima mreže, a u DEM modelu vrijednosti ne djeluju točno u čvorovima, potrebno je provesti dodatno povezivanje. Prema kontaktnim silama dobivenima DEM analizom izračunavaju se ekvivalentne sile u čvorovima konačnih elemenata, temeljene na principu virtualnog rada. Virtualni rad kontaktnih sila iznosi:

$$\delta W = \delta U^T F_{con} \quad (3)$$

gdje je  $F_{con}$  vektor sile u kontaktnim točkama između modela zrna i gornje površine temeljnog tla,  $U$  je pomak čvora u kojemu dolazi do kontakta, a može se izraziti kao umnožak pomaka čvora i funkcije oblika FEM metode, [45].



Slika 22. Način prijenosa opterećenja u kombiniranom FEM-DEM modelu [44]

Kombinaciju OOFEM i DEM koda u programu YADE, za modeliranje interakcije pragova i tucanika, predstavio je i Stransky [46]. Način prijenosa opterećenja u modelu prikazan je shemom na slici 22., a opterećenje dobiveno DEM proračunom i ovdje se zadaje u FEM modelu, Pomaci dobiveni FEM metodom postaju ulazni podaci u DEM model.

## 4. Zaključak

S porastom brzine kretanja tračničkih vozila i osovinskih opterećenja, degradacija kolosiječne zastorne prizme postaje značajan problem u održavanju kolosiječne konstrukcije. Stanje prizme utječe na trajanje kolosiječne konstrukcije, na sigurnost i udobnost vožnje, zbog čega je istraživanje ponašanja zastorne prizme nužno za pravodobno otkrivanje i prikladnu reakciju na promjene u navedenom segmentu. Zbog toga se danas upotrebljavaju različite metode monitoringa i numeričkih simulacija. U ovom radu izložen je pregled istraživanja vezanih za modeliranje metodom diskretnih elemenata, koja omogućuje vjernu simulaciju statičkog i dinamičkog ponašanja kamenog materijala zastorne prizme. Stabilnost i ponašanje čitave kolosiječne konstrukcije u značajnoj mjeri ovise o pomacima i djelovanjima unutar zastora. Radi što boljšega modeliranja ponašanja kamenih zrna zastora, uvode se različiti načini loma zrna te se zatim promatra međudjelovanje unutar sustava. Nadalje, kombinacijom metode diskretnih i konačnih elemenata moguće je povezati ponašanje ostalih dijelova kolosiječne konstrukcije, poput pragova ili temeljnoga tla. Ovaj pristup zahtijeva više istraživanja kojima se određuje utjecaj pomaka pragova na prijenos opterećenja unutar zastorne prizme. Također, ispitane su i promjene unutar zastora koje uzrokuju

promjene svojstava temeljnog tla. Na taj način moguće je projektirati zastornu prizmu prema konkretnim uvjetima na pojedinom području, uzimajući u obzir kvalitetu tla, kamena, vrstu podneblja i kvalitetu kolosiječnih elemenata.

Podudaranje s rezultatima eksperimenata pokazuje da se DEM metodom može s velikom točnošću prikazati ponašanje zastora, a slični se simulacijski postupci primjenjuju i kako bi se ispitao utjecaj uvođenja različitih elastičnih materijala na smanjenje krutosti kolosijeka. Posljedično se utvrđuje smanjenje odlamanja sitnijih čestica kamena i produljenje trajanja navedenog sloja kolosijeka. Na ovaj način moguće je realnije ocijeniti prijenos i raspodjelu opterećenja te kritična mjesta za slom materijala. Konačno, s porastom snage računala složenost će DEM simulacija, a time i njihova primjena na stvarne uvjete, nastaviti rasti. Treba očekivati značajan doprinos diskretnih modela ovom području istraživanja.

## Zahvala

Ovaj rad je izrađen u okviru projekta "Razvoj DIV elastične kopče" referentne MIS oznake: KK.01.2.1.01.0011 kojeg financira Ministarstvo gospodarstva, poduzetništva i obrta RH kroz program "Jačanje konkurentnosti gospodarstva poticanjem investicija i učinkovitijim korištenjem EU sredstava".

## LITERATURA

- [1] Ramūnas, V., Gailienė, I., Laurinavičius, A.: Crushed rock ballast bed in the railway lines of Lithuania : analysis of the situation and arising problems, *Environmental engineering*, The 9<sup>th</sup> International Conference, 2014, Vilnius, Lithuania, no. 164.
- [2] Selig, E., Waters, J.: *Track Geotechnology and Substructure Management*, pp. 446, 1994.
- [3] Sabato, A., Nieszrecki, C.: Feasibility of digital image correlation for railroad tie inspection and ballast support assessment, *Measurement*, 103 (2017), pp. 93-105.
- [4] Esveld, C.: *Modern Railway Track*, Second Edition, MRT-Productions, Zaltbommel, The Netherlands, 2001.
- [5] Stipanovic Oslakovic, I., Tan, X., Gavin, K.: European existing railway tracks: overview of typical problems and challenges, 3<sup>rd</sup> International Conference on Road and Rail Infrastructure - CETRA 2014, Road and Rail Infrastructure III (ed. Lakusic, S.), 28 - 30 April 2014., Split, Croatia
- [6] Jovanović, S., Guler, H., Čoko, B.: Track degradation analysis in the scope of railway infrastructure maintenance management systems, *GRAĐEVINAR*, 67 (2015) 3, pp. 247-258, <https://doi.org/10.14256/JCE.1194.2014>
- [7] Tešić, P., Jovanović, S., Dick, M.: Analysis of vehicle/track interaction measurement data using the V/TI Monitor system, *GRAĐEVINAR*, 70 (2018) 2, pp. 105-119, <https://doi.org/10.14256/JCE.2067.2017>
- [8] Lakušić, S., Ahac, M., Haladin, I.: Experimental investigation of railway track with under sleeper pad, *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Slovenian road and transportation congress*, pp. 386-393, 2010.
- [9] Sol-Sánchez, M., Thom, N., Moreno-Navarro, F., Rubio-Gámez, M., Airey, G.: A study into the use of crumb rubber in railway ballast, *Construction and Building Materials*, 75 (2015), pp. 19-24.
- [10] Lakušić, S., Ahac, M., Haladin, I.: Track stability using ballast bonding method, 10<sup>th</sup> Slovenski kongres o cestah in prometu, 2010.
- [11] D'Angelo, G., Thom, N., Lo Presti, D.: Bitumen stabilized ballast: A potential solution for railway track-bed, *Construction and Building Materials*, 2016.
- [12] Alves Costa, P., Calçada, R., Silva Cardoso, A.: Ballast mats for the reduction of railway traffic vibrations. Numerical study, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 42 (2012), pp. 137-150.
- [13] Nimbalkar, S., Indraratna, B., Asce, F.; Dash, S., Christie, D.: Improved Performance of Railway Ballast under Impact Loads Using Shock Mats, *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 138 (2012) 3, pp. 281-294.
- [14] The European Standard EN 13450:2002: *Aggregates for railway ballast*, 2002.
- [15] Alemu, A.: *Survey of Railway Ballast Selection and Aspects of Modelling Techniques*, Master Degree Project, 2011.
- [16] Quezada, J., Saussine, G., Breul, P.: *Ballast Settlement: mechanisms and its variability*, Alert Geomaterials Workshop, 2014.
- [17] Indraratna, B., Salim, W., Rujikiatkamjorn, C.: *Advanced Rail Geotechnology - Ballasted Track*. 2011.
- [18] Ramūnas, V., Vaitkus, A., Laurinavičius, A.: Relationship between Lifespan and Mechanical Performance of Railway Ballast Aggregate, 4<sup>th</sup> International Conference on Road and Rail Infrastructure - CETRA 2016, Road and Rail Infrastructure IV (ed. Lakusic, S.), 23 - 25 May 2016., Šibenik, Croatia

- [19] Tennakoon, N., Indraratna, B., Nimbalkar, S.: Impact of Ballast Fouling on Rail Tracks Quantification of fouling, Second International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance., pp. 1-11, 2014.
- [20] Munjiza, A., Knight, E., Rougier, E.: Computational Mechanics of Discontinua. 2011.
- [21] Zakeri, J., Mosayebi, S.A.: Study of ballast layer stiffness in railway tracks, GRADEVINAR, 68 (2016) 4, pp. 311-318, doi: <https://doi.org/10.14256/JCE.1232.2015>
- [22] O'Sullivan, C.: Particulate discrete element modelling: a geomechanics perspective. 2011.
- [23] Liu, S., Huang, H., Qiu, T.: Laboratory development and testing of "SMARTROCK" for railroad ballast using discrete element modeling, Proceedings of the 2015 Joint Rail Conference, pp. 1-6, 2016.
- [24] Azéma, E., Radjai, F. Saussine, G.: Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles, Mechanics of Materials, 41 (2009) 6, pp. 729-741.
- [25] González, F.: Master Thesis - Master on Numerical Methods in Engineering Numerical Modelling of Railway Ballast Using the Discrete Element Method, UPC Barcelonatech, 2015.
- [26] Chen, C., McDowell, G., Thom, N.: Investigating geogrid-reinforced ballast: Experimental pull-out tests and discrete element modelling, Soils and Foundations, (2014) 4, pp. 1-11.
- [27] Tutumluer, E., Qian, Y., Hashash, Y., Ghaboussi, J., Davis, D.: Discrete element modelling of ballasted track deformation behaviour, International Journal of Rail Transportation, 1 (2013), pp. 57-73.
- [28] Ebrahimi, A., Tinjum, J., Edil, T.: Deformational Behavior of Fouled Railway Ballast, Canadian Geotechnical Journal, 355 (2015) 52, pp. 344-355.
- [29] Ngo, N., Indraratna, B., Rujikiathmakjorn, C.: Investigating the Shear Behaviour of Fouled Ballast Using Discrete Element Modelling, International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering, 9 (2015) 12, pp. 1542-1546.
- [30] Qian, Y.: Geogrid-Aggregate Interlocking Mechanism Investigated via Discrete Element Modeling, Geosynthetics, Portland, 2015.
- [31] Domokos, G., Kun, F., Sipos, A., Szabó, T.: Universality of fragment shapes, Scientific Reports, 5 (2015), pp. 9147.
- [32] Oñate, E., Zárte, F., Miquel, J., Santasusana, M., Celigueta, M., Arrufat, F., Gandikota, R., Valiullin, K., Ring, L.: A local constitutive model for the discrete element method. Application to geomaterials and concrete, Computational Particle Mechanics, 2 (2015) 2, pp. 139-160.
- [33] Peng, B.: Discrete Element Method (DEM) Contact Models Applied to Pavement Simulation, Master Thesis, 2014.
- [34] Di Renzo, A., Di Maio, F.: Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes, Chemical Engineering Science, 59 (2004) 3, pp. 525-541.
- [35] Ngo, N., Indraratna, B., Rujikiatkamjorn, C.: Stabilization of track substructure with geo-inclusions - experimental evidence and DEM simulation, International Journal of Rail Transportation, pp. 1-24, 2017.
- [36] Huang, H., Tutumluer, E.: Discrete Element Modeling for fouled railroad ballast, Construction and Building Materials, 25 (2011) 8, pp. 3306-3312.
- [37] Effeindzourou, A., Chareyre, B., Thoeni, K., Giacomini, A., Kneib, F.: Modelling of deformable structures in the general framework of the discrete element method, Geotextiles and Geomembranes, 44 (2016) 2, pp. 143-156.
- [38] Zhou, T., Hu, B., Sun, J., Liu, Z.: Discrete Element Method Simulation of Railway Ballast Compactness During Tamping Process, The Open Electrical & Electronic Engineering Journal, 7 (2013), pp. 103-109.
- [39] Gao, R., Du, X., Zeng, Y., Li, Y., Yan, J.: A new method to simulate irregular particles by discrete element method, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 4 (2012) 3, pp. 276-281.
- [40] Ergenzinger, C., Seifried, R., Eberhard, P.: A Discrete Element Approach to Model Breakable Railway Ballast, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 7 (2012), pp. 41010.
- [41] Vizcarra, G., Nimbalkar, S., Casagrande, M.: Modeling Behaviour of Railway Ballast in Prismoidal Apparatus Using Discrete Element Method, Procedia Engineering, 143 (2016), pp. 1177-1184.
- [42] Harkness, J., Zervos, A., Le Pen, L., Aingaran, S., Powrie, W.: Discrete element simulation of railway ballast: modelling cell pressure effects in triaxial tests, Granular Matter, 18 (2016) 3, pp. 1-13.
- [43] Gao, Y., Qian, Y., Stoffels, S., Huang, H., Liu, S.: Characterization of railroad crosstie movements by numerical modeling and field investigation, Construction and Building Materials, 13 (2017), pp. 542-551.
- [44] Ngo, N., Indraratna, B., Rujikiatkamjorn, C.: Simulation Ballasted Track Behavior: Numerical Treatment and Field Application, International Journal of Geomechanics, 17 (2017) 6, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000831](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000831)
- [45] Shao, S., Yan, Y, Ji, S.: Combined Discrete-Finite Element Modeling of Ballasted Railway Track Under Cyclic Loading, International Journal of Computational Methods, 14 (2017) 2, pp. 1750047.
- [46] Stransky, J.: Combination of FEM and DEM with application to railway ballast-sleeper interaction, Engineering Mechanics 2014, 20<sup>th</sup> International Conference, 2014.