

Primljen / Received: 7.1.2016.

Ispravljen / Corrected: 13.8.2016.

Prihvaćen / Accepted: 30.9.2016.

Dostupno online / Available online: 10.1.2018.

Različiti pristupi dvodimenzionalnom numeričkom modeliranju prirodnih vodotoka

Autori:



¹Doc.dr.sc. **Zoltan Horvat**, dipl.ing.građ.
horvath.czoczek.zoltan@gmail.com



¹Doc.dr.sc. **Mirjana Horvat**, dipl.ing.građ.
isic.marijana@gmail.com



²Doc.dr.sc. **Nikola Rosić**, dipl.ing.građ.
nrosic@grf.bg.ac.rs



²Mr.sc. **Budo Zindović**, dipl.ing.građ.
bzindovic@hikom.grf.bg.ac.rs



²Prof.dr.sc. **Radomir Kapor**, dipl.ing.građ.
rkapor@hikom.grf.bg.ac.rs

¹Sveučilište u Novom Sadu,
Građevinski fakultet Subotica

²Sveučilište u Beogradu
Građevinski fakultet

Pregledni rad

Zoltan Horvat, Mirjana Horvat, Nikola Rosić, Budo Zindović, Radomir Kapor

Različiti pristupi dvodimenzionalnom numeričkom modeliranju prirodnih vodotoka

U radu su prikazani rezultati analize tri različita pristupa numeričkom modeliranju otvorenih vodotoka. Analizirana su dva primjera strujanja, jednoliko strujanje na fizikalnom modelu krivine na rijeci Tisi i nejednoliko strujanje na rijeci Dunavu. Analiza standardne pogreške pokazala je da se upotrebom dviju numeričkih metoda u kojima se koriste računске mreže dobivaju rezultati istog reda točnosti, dok metoda u kojoj se ne koristi računска mreža, metoda hidrodinamike izgladenih čestica, zahtijeva daljnja poboljšanja kako bi se uspješno modeliralo postupno promjenjivo strujanje.

Ključne riječi:

2D strujanje, metoda konačnih elemenata, metoda konačnih razlika, metoda hidrodinamike izgladenih čestica

Subject review

Zoltan Horvat, Mirjana Horvat, Nikola Rosić, Budo Zindović, Radomir Kapor

Different approaches to two-dimensional numerical modelling of natural watercourses

Results obtained by analysis of three different approaches to numerical modelling of open watercourses are presented in the paper. Two examples of flow, uniform flow on the physical model of a curve at the Tisza River and nonuniform flow at the Danube River, are analysed. Standard error analysis has revealed that results of the similar order of magnitude are obtained in implementation of two numerical methods in which computational grids are used, while the method in which computational grid is not used, i.e. the smoothed particle hydrodynamics method, requires further improvements to enable successful modelling of the gradually variable flow.

Key words:

2D flow, finite element method, finite difference method, smoothed particle hydrodynamics method

Übersichtsarbeit

Zoltan Horvat, Mirjana Horvat, Nikola Rosić, Budo Zindović, Radomir Kapor

Unterschiedliche Ansätze in der zweidimensionalen numerischen Modellierung von natürlichen Gerinnen

In der Arbeit werden die Ergebnisse von drei unterschiedlichen Ansätzen bei der numerischen Modellierung von offenen Gerinnen dargestellt. Es wurden zwei Strömungsbeispiele analysiert, die gleichförmige Strömung am physikalischen Modell einer Windung am Fluss Tisa und die ungleichförmige Strömung an der Donau. Die Auswertung eines Standardfehlers hat zeigt, dass bei Anwendung der zwei numerischen Methoden, bei welchen Rechnernetze zur Anwendung kommen, vergleichbar präzise Ergebnisse gewonnen werden, während die Methode, in welcher das Rechnernetz nicht angewendet wird, bzw. die Methode der geglätteten Teilchen-Hydrodynamik, weitere Verbesserungen bedarf.

Schlüsselwörter:

2D Strömung, Methode der finiten Elemente, FEM, Methode der geglätteten Teilchen-Hydrodynamik

1. Uvod

Složeni uvjeti strujanja u prirodnim vodotocima nameću potrebu za razvojem i provjerom pouzdanih matematičkih modela. Područje riječne hidraulike pokriva široko polje u koje se ubrajaju pronos nanosa, riječna morfologija, pronos zagađenja i njegov utjecaj na živi svijet te je zato proračun strujnog polja prvi korak u svim analizama vezanim za prirodne vodotoke. Stoga, cilj ovog članka je istraživanje utjecaja tri različita pristupa modeliranju tečenja sa slobodnom površinom. Prvi pristup je implementiran u MoBed modelu [1] i predstavlja metodu razdvajanja operatora na strukturiranoj mreži (eng. *fractional step method*). Drugi pristup, implementiran u modelu Telemac-2D, temeljen je na metodi razdvajanja operatora, ali koristi nestrukturiranu mrežu i metodu konačnih elemenata [2]. Iako su brojni autori razvili različite metode za proračun isušivanja računске mreže, primjena modela s računskim mrežama je ograničena u slučaju naglo promjenjivog tečenja [3]. Nasuprot ovim pristupima, postupci bazirani na Lagrangeovoj metodi praćenja čestica koji ne koriste računsku mrežu vrlo su prilagodljivi ovakvim tokovima [4]. Razumno je očekivati da bi, ako metoda hidrodinamike izglađenih čestica (eng. *Smoothed Particle Hydrodynamics* - SPH metoda) daje bolje rezultate za postupno promjenjivo tečenje, za modeliranje tečenja u prirodnim vodotocima trebalo primjenjivati metode koje ne koriste računsku mrežu.

Značenje numeričkog modeliranja u otvorenim tokovima ogleda se u velikom broju razvijenih modela i pristupa [1, 5-8]. Brojni autori, težeći istom cilju (točniji i primjenjiv pristup za procjenu plavljenja, domene strujanja, hidrauličkog utjecaja na strukture, i sl.) primjenjuju razne pristupe modeliranju: metodu konačnih elemenata [2], metodu konačnih zapremina [9], metodu konačnih razlika [10], SPH metodu [11]. Uobičajeno je da se paralelno s numeričkim modeliranjem, radi njihova testiranja, provode i mjerenja u laboratoriju ili na terenu s jasno definiranim rubnim uvjetima. Rezultat toga je velik broj objavljenih rezultata koji sadrže samo usporedbu izračunanih i izmjerenih vrijednosti brzina, vodostaja i sl. Drugi pristup procjeni točnosti numeričkih modela je usporedba dobivenih rezultata s rezultatima općepoznatih numeričkih modela. S druge strane, istraživači su rijetko u prilici provjeriti primjenjivost svog modela u odnosu na druge modele i mjerenja. Autori ovog članka su primijenili tri pristupa numeričkom modeliranju kako bi utvrdili koji od postupaka daje bolje rezultate. Primijenjena su tri modela za simulaciju jednolikog strujanja, a dva (MoBed2 i Telemac-2D) primijenjena su i na nejednoliko tečenje. Dobiveni rezultati su procijenjeni usporedbom s mjerenim rezultatima te proračunom odgovarajućih granica pogreške.

2. Osnovne jednadžbe

Matematički model tečenja u otvorenim vodotocima temelji se na Navier-Stokesovim jednadžbama osrednjenim po dubini. Osnovne jednadžbe su zakon održanja mase i količine gibanja,

u Kartezijevom koordinatnom sustavu mogu se napisati u sljedećem obliku [8]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial}{\partial x}(z_b + h) - \frac{1}{\rho} \left(\tau_{bx} + \frac{\partial}{\partial x}(h\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\tau_{yx}) \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = -gh \frac{\partial}{\partial y}(z_b + h) - \frac{1}{\rho} \left(\tau_{by} + \frac{\partial}{\partial x}(h\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\tau_{yy}) \right) \quad (3)$$

gdje je h dubina vode, u i v su komponente vektora brzine u pravcu x i y osi, t je vrijeme, g je gravitacijsko ubrzanje, z_b je kota dna, τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} i τ_{yx} zajedničko djelovanje viskoznih i turbulentnih posmičnih naprezanja, τ_{bx} i τ_{by} su posmična naprezanja na dnu u smjeru x i y osi. Posmična naprezanja na dnu procijenjena su primjenom uopćene Manningove jednadžbe za dvodimenzionalno tečenje:

$$\tau_{bx} = -\frac{\rho g n^2}{h^{1/3}} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{by} = -\frac{\rho g n^2}{h^{1/3}} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4)$$

Cilj ovog istraživanja je procijeniti učinkovitost različitih numeričkih pristupa u rješavanju jednadžbi matematičkog modela. Razmatrane su: metoda konačnih elemenata kao predstavnik metoda na nestrukturiranim mrežama, metoda konačnih razlika kao pristup na strukturiranim mrežama i SPH metoda za postupke koji ne koriste računsku mrežu. U istraživanju su primijenjeni dobro poznati računski modeli. Ovdje će se ukratko opisati i implementirati modeli: Telemac (metoda konačnih elemenata) [2], MoBed2 (metoda konačnih razlika) [1] i SPHysics (SPH metoda) [11-13].

2.1. Model Telemac-2D

Telemac je razvijen od strane Department Laboratoire National d'Hydraulique (LNH) pri Electricit e de France. Cijeli paket obuhvaća niz računskih modula u kojima je implementirana metoda konačnih elemenata. U ovom dijelu usmjerit će se na model Telemac-2D.

U Telemac-2D implementiran je postupak rješavanja jednadžbi tečenja u plitkom području. Kao rezultat dobivaju se dubina i dvije komponente vektora brzine u svakoj računskoj točki [14]. Te točke definiraju se u postupku diskretizacije računске domene. Kako bi se postigla velika fleksibilnost, Telemac-2D koristi nestrukturiranu mrežu sastavljenu od trokutastih elemenata. Kao pristup u rješavanju, implementirani su: metoda razdvajanja operatora u metodi karakteristika, nekoliko verzija Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) metode i hibridni postupak koji predstavlja kombinaciju prethodna dva [8]. Budući da je u modelu MoBed2 implementirana metoda karakteristika s metodom razdvajanja operatora, koju je razvio Yanenko [15], autori su izabrali ovaj postupak za rješavanje jednadžbi u modelu Telemac-2D. Postupak rješavanja

jednadžbi (1)-(3) se sastoji od dva koraka. Prvi korak obuhvaća adveksijski dio jednadžbi:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^a + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^a + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^a + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

a zatim se rješava drugi korak koji predstavlja kombinaciju koraka difuzije i propagacije:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{a+d+p} - \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^a + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{a+d+p} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^a = -g \frac{\partial}{\partial x} (z_b + h) - \frac{1}{\rho h} \left(\tau_{bx} + \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yx}) \right) \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{a+d+p} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^a = -g \frac{\partial}{\partial y} (z_b + h) - \frac{1}{\rho h} \left(\tau_{by} + \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yy}) \right)$$

Jednadžbe (6) predstavljaju članove iz jednadžbi održanja mase i količine gibanja (2) preostalih nakon prvog koraka. Gornji indeksi a i $a+d+p$ označavaju dva računjska koraka: adveksijski i kombinirani korak advekcije, difuzije i propagacije. Integracija jednadžbi (5) i (6) provodi se duž karakteristika podjelom na proizvoljan broj pravocrtnih segmenata.

2.2. Model MoBed2

Model MoBed2 implementira rešenje prostornih, vremenski osrednjenih jednadžbi Navier-Stokes-a u krivolinijskim koordinatama [1]. Zatim su te jednadžbe osrednjene po dubini i riješene metodom razdvajanja operatora u tri računjska koraka [15]. Postupak rješavanja implementiran u modelu MoBed2, koji je osmislio Yanenko [15], optimalan je za modele koji koriste konačne razlike i krivolinijske koordinate. Ove jednadžbe se razlikuju od onih koje su implementirane u modelu Telemac-2D jer su jednadžbe (5)-(6) optimizirane za metodu konačnih elemenata. Adveksijski korak u MoBed2-u obuhvaća samo jednadžbe održanja količina gibanja (nasuprot tome, jednadžbe (6) obuhvaćaju i dio jednadžbi kontinuiteta), dok se koraci difuzije i propagacije rješavaju odvojeno. Adveksijski korak je rješavan metodom karakteristika. Slično kao u modelu Telemac-2D, integracija se provodi duž karakteristika podjelom na pravocrtne segmente [1]. Rezultirajuće jednadžbe za brzine su nelinearne i riješene su iterativnim postupkom Newton-Raphsona [16-18]. Jednadžbe difuzijskog koraka su:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{a+d} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^a = \frac{1}{h\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}h) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}h) \right) \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{a+d} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^a = \frac{1}{h\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}h) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}h) \right)$$

i diskretizirane su metodom konačnih razlika primjenom Crank-Nicolsonove sheme za integraciju po vremenu [19]. Jednadžbe (7) su linearizirane "alternating direction implicit" (ADI) metodom [20], što rezultira tri-dijagonalnim sustavom jednadžbi koji se efikasno rješava Thomas-ovim algoritmom dvostrukog prolaza [1], što značajno skraćuje vrijeme proračuna.

Korak propagacije obuhvaća preostale članove jednadžbi održanja mase i količine gibanja:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{a+d+p} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{a+d} = -gh \frac{\partial}{\partial x} (z_b + h) - \frac{\tau_{bx}}{\rho h}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{a+d+p} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{a+d} = -gh \frac{\partial}{\partial y} (z_b + h) - \frac{\tau_{by}}{\rho h} \quad (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0$$

Jednadžbe (8) su transformirane primjenom težinskog koeficijenta za vrijeme. Prve dvije jednadžbe su linearizirane i preuređene kako bi se eliminirali nelinearni članovi hu i hv u jednadžbi kontinuiteta. Kao rezultat, ove tri jednadžbe svode se na jednu jednadžbu sa samo jednom nepoznanicom, a to je prirast dubine [1]. Radi izbjegavanja numeričke nestabilnosti, rezultirajuća jednadžba je diskretizirana na razmaknutoj mreži (engl. *staggered grid*), linearizirana metodom ADI i riješena Thomasovim algoritmom.

2.3. Modified SWE-SPHysics code

Metoda hidrodinamike izgladenih čestica (SPH) prvi je put primijenjena u astrofizici [21, 22]. Metoda se temelji na praćenju čestica fluida bez fiksne povezanosti u obliku računjske mreže. Pomoću SPH metode se aproksimativno rješavaju jednadžbe matematičkog modela strujanja kojeg čine obične diferencijalne jednadžbe. Prostorni izvodi se, u numeričkom postupku, računaju analitičkim diferenciranjem interpolacijske funkcije. Proizvoljna funkcija se računa interpolacijom u kojoj se primjenjuju vrijednosti iste funkcije u nizu nepravilno raspoređenih računjskih točaka koje prate kretanje čestica fluida. Interpolacija ima lokalni karakter jer se vrijednosti funkcije u određenoj računskoj točki određuju samo na osnovi vrijednosti u okolnim česticama fluida. Težinski faktor u interpolaciji se određuje preko tzv. kernel funkcije. Vrijednosti te funkcije opadaju s povećanjem udaljenosti između susjednih čestica. Postupak proračuna implementiran u modelu SWE-SPHysics detaljnije je objašnjen u radovima [11-13]. Kako bi se primijenila SPH metoda, jednadžbe strujanja u horizontalnoj ravnini treba predstaviti u Lagrangeovom obliku:

$$\frac{dh_p}{dt} = -h_p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -g \nabla h_p + g(\nabla z_b + \mathbf{S}_f + \mathbf{O}_{turb}) \quad (10)$$

gdje je h_p dubina toka, a $\nabla_z b$ kota dna korita. Preko izvornog člana S_f se određuje utjecaj trenja na dno korita (korištenjem Manningovog koeficijenta trenja n). Posljednji član na desnoj strani izraza (10) Θ_{turb} predstavlja veličinu na osnovi koje se određuje utjecaj turbulencije. Ovaj član se upotrebljava u radu kao zamjena za umjetnu viskoznost koja se koristi u izvornoj varijanti SWE-SPHysics modela. Članovi s desne strane izraza (9) i (10) se aproksimiraju interpolacijom koristeći sljedeća pravila:

$$A(\mathbf{r}) \approx \int_{\Omega} A(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', l) d\mathbf{r}' \approx \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', l) \quad (11)$$

odnosno za operator diferenciranja:

$$\nabla \cdot A(\mathbf{r}) \approx - \int_{\Omega} A(\mathbf{r}') \nabla \cdot W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', l) d\mathbf{r}' \approx - \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla \cdot W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', l) \quad (12)$$

U izrazima (11) i (12) A označava proizvoljnu funkciju, \mathbf{r} je vektor položaja čestica za koji se računa vrijednost funkcije A , indeks j označava susjedne čestice čija je pozicija određena vektorom položaja \mathbf{r}' i Ω označava područje integracije (računsku domenu). Težinska (kernel) funkcija je označena sa W , dok je l najveća udaljenost između dvije susjedne čestice (udaljenost l se koristi kao kriterij za identifikaciju susjednih čestica).

U izvornoj varijanti SWE-SPHysics modela nije moguće zadavati proizvoljni raspored brzina na granici proračunske domene. Autori rada i dalje rade na rješavanju ovog problema koji ima određeni utjecaj na predstavljenu usporedbu. Međutim, u ovom radu, približno simetričan (neujednačen) raspored brzina dobiven je primjenom originalnog postupka koji se temelji na varijaciji Manningovog koeficijenta trenja po širini korita u rubnom području strujanja.

Kako bi se simuliralo jednoliko strujanje pomoću SPH metode, potrebno je zadavati vremenski nepromjenjive rubne uvjete. Vremenska integracija brzina i položaja obavlja se korištenjem "leap-frog" sheme [11, 12]. Tijekom proračuna mijenja se raspored čestica pa je u blizini svake čestice, kako bi se omogućila odgovarajuća točnost postupka, potrebno održavati približno jednak broj susjednih čestica na osnovi kojih se obavlja interpolacija [23]. Promjena udaljenosti zavisi od dubine vode pa se vrijednosti ovih dviju veličina određuju u iterativnom postupku primjenom Newton-Raphsonova postupka.

Kako bi se vrijednosti veličina koje izazivaju pozornost odredile na mjestima gdje su obavljena mjerenja, primjenjuje se pravilo za interpolaciju definirano izrazom (11).

2.4. Model turbulencije

Kako se u originalnom obliku modela SWE-SPHysics ne uzima u obzir utjecaj turbulencije, autori su u primijenjeni SPH postupak implementirali jednostavan model turbulencije zasnovan na

konceptu Boussinesqa. Isti model turbulencije korišten je i u modelima MoBed2 i Telemac:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\tau} = \nu_t \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \nu_t \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdje $\bar{\tau}$ predstavlja tenzor turbulentnih naprezanja. Umjetna viskoznost ν_t izračunana je pomoću izraza [24]:

$$\nu_t = \alpha_t h u_* \quad (14)$$

gdje je u_* brzina posmika na dnu, $u_* = [C_k(u^2 + v^2)]^{1/2}$. Pri tome je koeficijent $\alpha_t = \kappa/6$, gdje je κ Von Karmanova konstanta ($\kappa = 0,4$).

3. Mjerenja

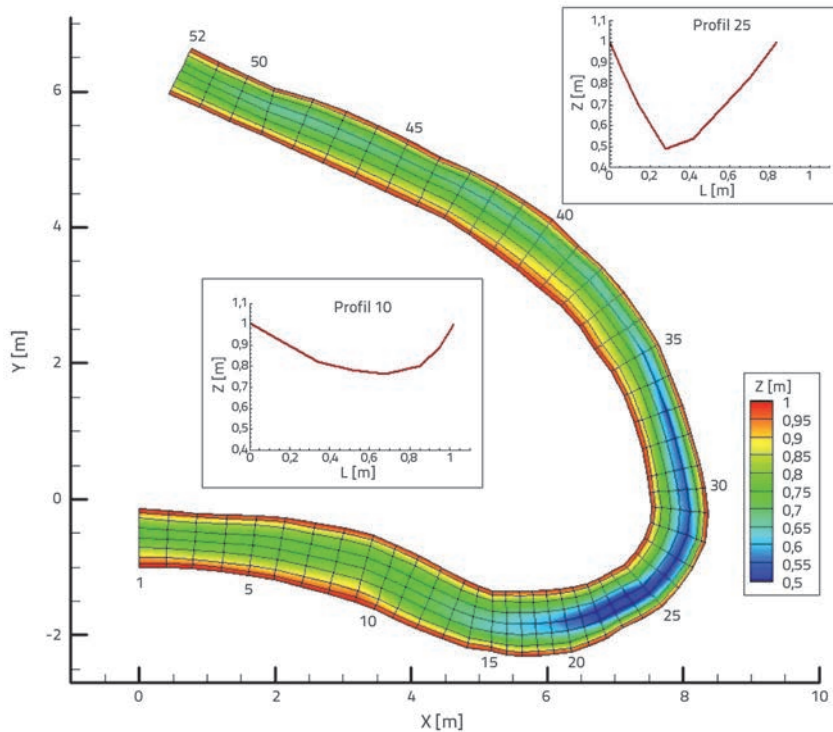
Razmatrani numerički modeli provjereni su na dva primjera. Prvi primjer je jednoliko strujanje u riječnoj krivini. Podaci su dobiveni laboratorijskim mjerenjima na fizikalnom modelu i iskorišteni su za usporedbu mogućnosti modela da reproduciraju složenu strujnu sliku. Osnovni podaci o ovim mjerenjima donose se u poglavlju 3.1. U drugom primjeru korišteni su rezultati mjerenja s prirodnog vodotoka za slučaj nejednolikog strujanja (poglavlje 3.2.).

3.1. Laboratorijska mjerenja

Mjerenja pri jednolikom strujanju provedena su na fizikalnom modelu riječne krivine u Institutu za vodoprivredu "Jaroslav Černi" u Beogradu. Ukupna dužina modela iznosila je 22 m, prosječne širine 1 m. Budući da je materijal riječnog korita isti za cijeli model, pretpostavljeno je da je hidraulička hrapavost jednolika na cijelom području. Na slici 1. prikazana je računski mreža s 52 profila i 9 vertikala u svakom presjeku, što daje 468 računskih točaka. Dok je batimetrija korita mjerena u svim točkama, brzine i dubine su mjerene u 40 profila. Mjerenje brzine provedeno je hidrometrijskim krilom. Kako je mjerenje obavljeno za potrebe modeliranja dvodimenzionalnog strujanja, potrebno je izmjeriti prosječnu brzinu duž svake vertikale. To je izvedeno mjerenjem brzine u nekoliko točaka duž svake vertikale (ne više od četiri točke po vertikali). Uzvodni rubni uvjet fizikalnog modela su zadane konstantne vrijednosti jediničnih protoka, dok je za nizvodni zadana konstantna kota razine vode. Detalji mjerenja prikazani su u disertaciji [25].

3.2. Terenska mjerenja

Terenska mjerenja provedena su na dionici rijeke Dunav, u graničnom području između Mađarske i Srbije. Podaci su prikupljeni u periodu od pet dana (svibanj 2011.). U izabranoj dionici, između Bezdana (rkm 1425,5) u Srbiji i Mohaču (rkm 1446,9) u Mađarskoj (slika 2.), podaci o batimetriji (kote dna



Slika 1. Domena fizikalnog modela krivine na rijeci Tisi

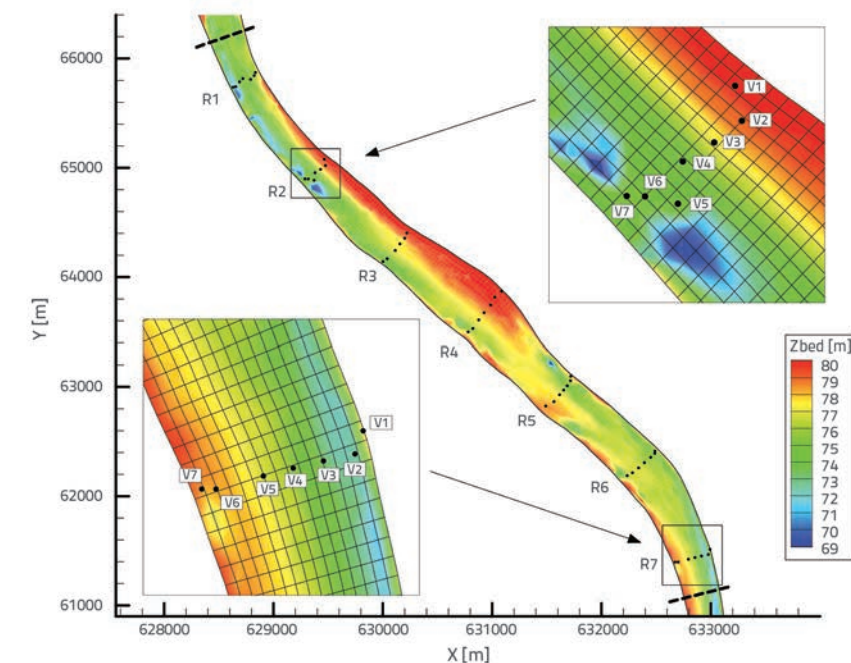
Mjerenje brzine je provedeno u skladu s programom istraživanja prikazanim u [26, 27]. Plovilo s ADCP uređajem je usidreno i snimanje je trajalo 10 minuta, što je dovoljno dugo kako bi se dobile reprezentativne, vremenski osrednjene vrijednosti. Podaci s ADCP uređaja su obrađeni i dobiven je raspored brzina po dubini toka. Nužni podaci o rubnim uvjetima za potrebe proračuna osigurani su mjerenjima protoka u Mohaču i kota vodostaja u Bezdanu dva puta u toku svakog dana. Više podataka o mjerenjima predstavljeno je u prije objavljenom članku [1].

Nakon prikupljanja podataka o brzinama u svakoj vertikali, osrednjavanjem je dobivena reprezentativna vrijednost prosječne brzine po dubini i one su uspoređene s izračunanim brzinama pomoću numeričkih modela.

4. Analiza rezultata

Razmatrani modeli ocjenjivani su u dva računaska primjera. U prvom primjeru koriste se rezultati laboratorijskog ispitivanja jednolikog tečenja na fizikalnom modelu riječne krivine koje je opisano u poglavlju 3.1, dok se u drugom primjeru analizira nejednoliko strujanje u prirodnom vodotoku koje je opisano u poglavlju 3.2. Treba istaknuti da se u oba primjera razmatra strujanje u prirodnim vodotocima složene geometrije korita kako bi se razmotrila mogućnost primjene analiziranih računskih modela u hidrotehnici.

Ocjena računskih modela je obavljena usporedbom izračunanih i izmjerenih brzina. Kako bi se postiglo bolje razumijevanje rezultata usporedbe, predstavljena analiza je proširena prikazom izračunatih normi pogreške L_1 , L_2 i L_∞ koje su određene prema izrazima (15). Vrijednosti x_i označavaju razliku između izmjerenih i izračunanih vrijednosti. Norme pogreške su



Slika 2. Mjerenja na terenu – dionica rijeke Dunava od Mohača do Bezdana

korita) prikupljeni su u profilima na udaljenosti od približno 100 m, što je rezultiralo s 215 poprečnih presjeka. Unutar dionice, sedam profila je izabrano za mjerenja brzine (slika 2.). Ti profili su između rkm 1438 i rkm 1432, na međusobnoj udaljenosti približno kilometar. U svakom profilu, u sedam vertikala su brzine mjerene pomoću ADCP uređaja.

izračunane za obje komponente vektora brzine i prikazane su za oba primjera:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad L_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (15)$$

4.1. Analiza jednolikog strujanja

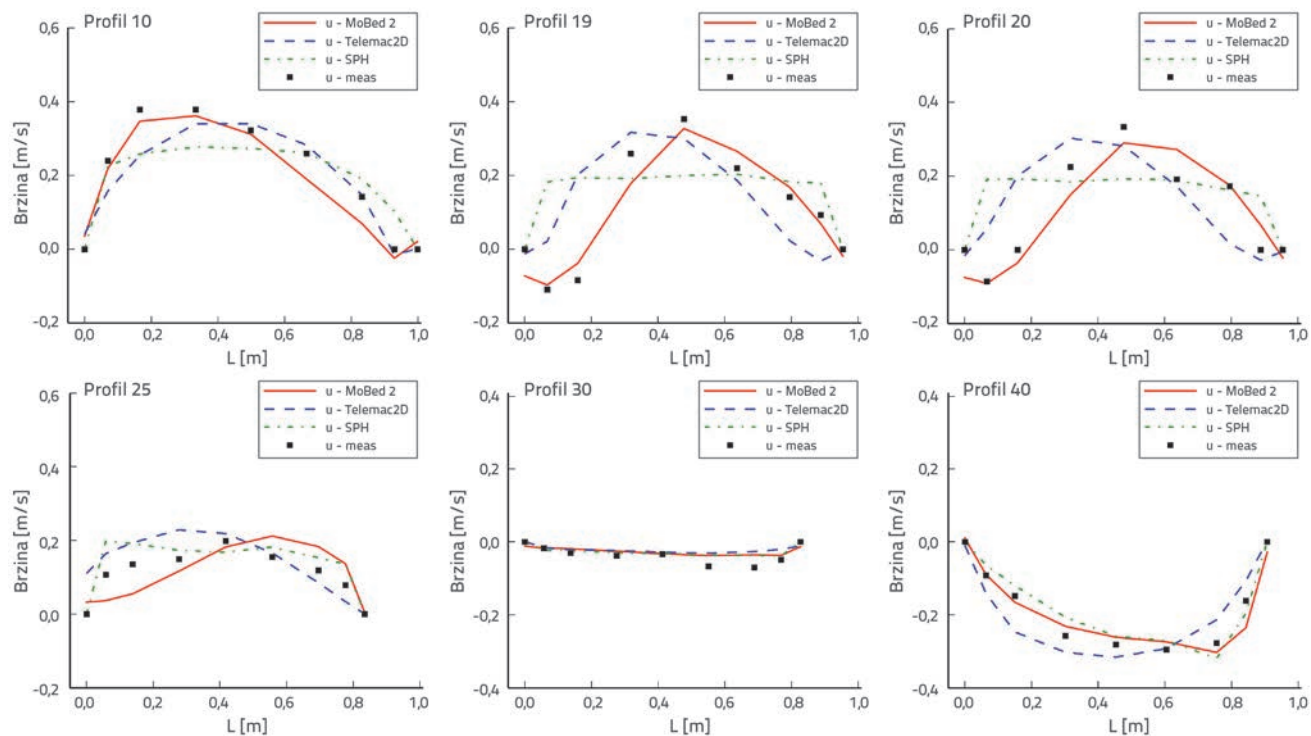
Numerički modeli predstavljeni u poglavlju 2 korišteni su za simulaciju jednolikog tečenja razmatranog u laboratorijskim ispitivanjima koja su opisana u poglavlju 3.1. Uzvodni rubni uvjet predstavlja konstantan protok, dok je konstantna kota razine vode nizvodni rubni uvjet. Na slici 1. je prikazana računska mreža korištena u modelu MoBed2. Kao što je prije objašnjeno, položaji računskih točaka odgovaraju mjernim mjestima. U slučaju modela Telemac2D raspored računskih točaka je isti, ali se mreža, zbog boljeg prilagođavanja geometriji toka, sastoji od trokuta. SPH model zahtijeva, umjesto zadavanja fiksnog broja računskih točaka, definiranje broja čestica koji najtočnije opisuju strujanje. Korištenjem broja čestica koji odgovara broju mjernih mjesta, točnost SPH postupka nije zadovoljavajuća. Posebnom analizom utvrđeno je da je, u smislu efikasnosti, optimalan početni broj čestica 9000. Naime, kao što je u tablici 1. je pokazano, daljnjim povećanjem broja čestica ne dobivaju se značajne razlike u točnosti rezultata, dok se vrijeme proračuna značajno povećava.

Tablica 1. Analiza jednolikog tečenja – utjecaj broja čestica u SPH simulacijama na normu pogreške L_1 za u komponentu brzine i vrijeme proračuna

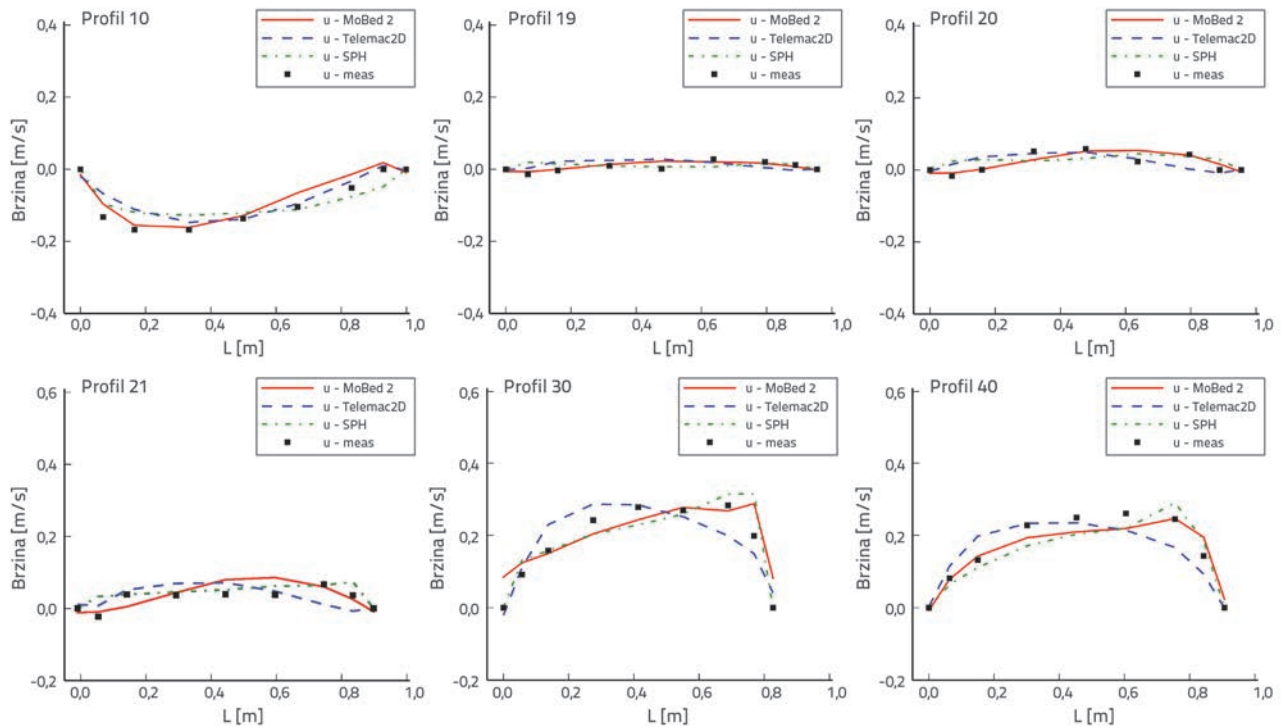
Broj čestica	L_1	Vrijeme proračuna [min]
9000	0,383	311
15000	0,382	413
30000	0,382	882

Ovdje treba napomenuti da su simulacije obavljene SPH metodom, čak i u slučaju kada se na početku proračuna koristi 9000 čestica, znatno duže trajale od simulacija obavljenih primjenom drugih dviju razmatranih metoda.

U svim modelima kao kalibracijski parametar korišten je Manningov koeficijent trenja. Najbolje podudaranje izmjerenih i izračunanih razina vode u svim modelima dobiveno je za vrijednost Manningovog koeficijenta 0,02. Nakon kalibracijskog postupka, modeli su ocjenjivani usporedbom izračunanih i izmjerenih vrijednosti komponenti vektora brzine. Na slikama 3. i 4. redom su prikazani rasporedi komponenti brzina u i n za šest izabranih poprečnih presjeka (10, 19, 20, 25, 30 i 40). Izmjerene vrijednosti su označene s "u(v)-meas", s "u(v)-Telemac2D" vrijednosti dobivene pomoću modela Telemac-2D, s "u(v)-MoBed2" rezultati simulacije obavljene modelom MoBed2, dok "u(v)-SWE-SPH" označava rezultate dobivene korištenjem modificiranog SWE-SPHysics modela. Za detaljnije ispitivanje, dodatno je obavljena analiza pogreške L_1, L_2 i L_∞ . Vrijednosti norme, koje reprezentiraju odstupanja računskih vrijednosti od izmjerenih, za obje komponente brzine (u i n) prikazane su na slici 5. za sve poprečne presjeke u kojima su obavljena laboratorijska mjerenja. Vizualnim pregledom može se zaključiti da postoje uočljive razlike između izmjerenih i izračunanih vrijednosti. Kako bi se izveo jasniji zaključak, mogućnosti računskih modela ocijenjene su po segmentima računске domene, jer se na svakom dijelu uočavaju različite tendencije odstupanja. Prvi segment predstavlja uzvodni dio domene (dionica između profila 1 i 15), drugi segment obuhvaća krivinu (od presjeka 16 do presjeka 28),



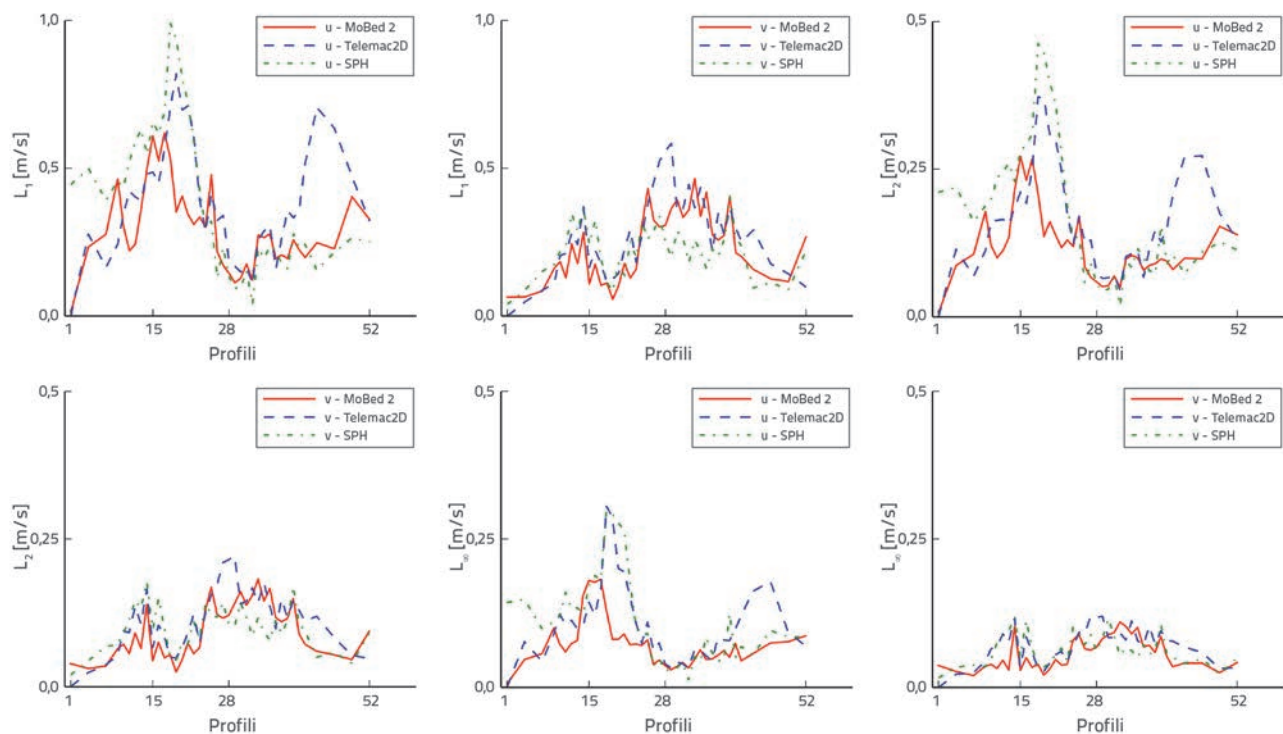
Slika 3. Analiza jednolikog tečenja – komponenta brzine u



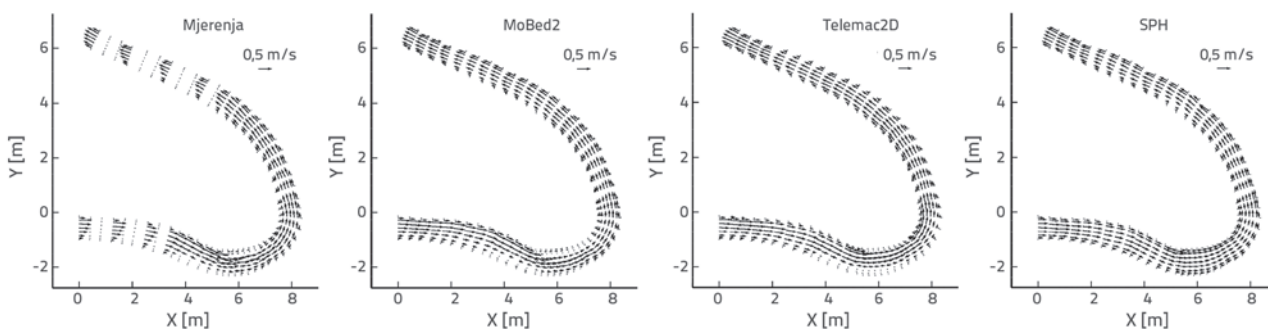
Slika 4. Analiza jednolikog tečenja – komponenta brzine v

a treći predstavlja nizvodni pravac (od profila 29 do profila 52). Zaključci koji slijede su dobiveni analizom rezultata prikazanih na slikama 3., 4. i 5.

Na prvom segmentu primjena je modela MoBed2 rezultirala nešto boljim poklapanjem s mjerenjima od preostala dva modela. Upotrebom modela MoBed2 i Telemac-2D dobivaju



Slika 5. Analiza jednolikog tečenja – norme pogreški za komponente brzine u i v



Slika 6. Analiza jednolikog tečenja – raspored vektora brzine u horizontalnoj ravnini

se kvalitativno dobra poklapanja s eksperimentom (brzine su veće na lijevoj obali kao što pokazuje dijagram za profil 10 na slikama 3. i 4.). Točnost reprodukcije polja brzine na prvom je segmentu najmanja kad se primijeni SWE-SPHysics model. Ovo se može objasniti nekonzistencijom u zadavanju uzvodnog rubnog uvjeta. Najveće razlike između modela zabilježene su u rezultatima za drugi segment. Samo se upotrebom modela MoBed2 dobivaju negativne brzine na lijevoj obali, kao što je zabilježeno i na fizikalnom modelu (profili 19, 20 i 21 na slici 3.). S druge strane, model Telemac-2D daje samo smanjenje brzina. Konačno, upotrebom SWE-SPHysics modela se ne dobiva vjerna reprodukcija strujanja u krivini. Redoslijed modela po točnosti se mijenja na trećem segmentu. Suprotno rezultatima na prva dva segmenta, rezultati modificiranog SWE-SPHysics modela se najbolje slažu s mjerenjima, što potvrđuju izračunane norme pogreške prikazane na slici 5.

Raspored brzina na cijeloj računskoj domeni, dobiven na osnovi laboratorijskog mjerenja odnosno upotrebom tri modela, prikazan je na slici 6. Kao što se sa slike može primijetiti, mjerenjima je identificirana prisutnost regije s manjim vrijednostima brzina na konkavnoj strani krivine (između presjeka 10 i 15) i postojanje vrtloga na konveksnoj strani (između presjeka 15 i 25). Pregledom rezultata upotrebe MoBed2 modela ove dvije pojave se jasno uočavaju, a nisu dovoljno izražene u rasporedu brzina izračunanih upotrebom Telemac-2D modela. S druge strane, pomoću modificiranog SWE-SPHysics modela, složeno strujanje u krivini nije reproducirano na zadovoljavajući način.

4.2. Analiza nejednolikog tečenja

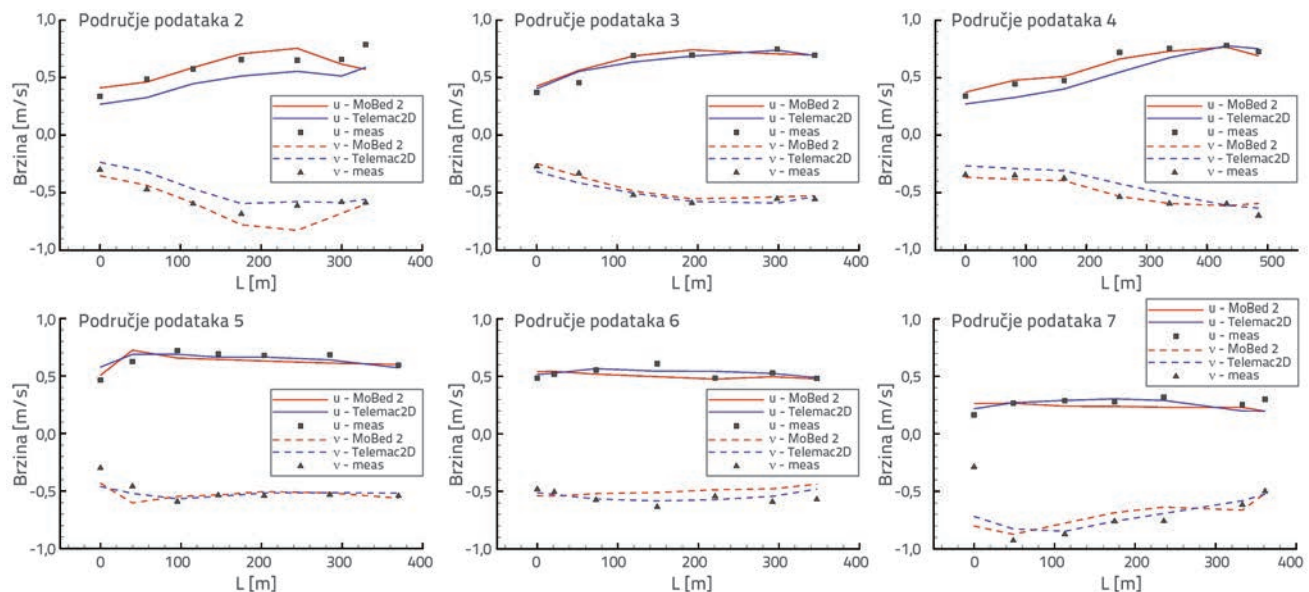
Ograničenje modela SWE-SPHysics vrlo je mala vrijednost vremenskog koraka zbog velikog broja čestica koje su nužne za rekonstrukciju polja brzina. Zbog toga su potrebni dugotrajni proračuni, što ovaj model čini neprimjenjivim za praktičnu primjenu nejednolikog tečenja u prirodnim vodotocima i nije razmatran u ovom primjeru. Preostala dva modela, Telemac-2D i MoBed2, primijenjena su za primjer opisan u dijelu 3.2. Izmjereni protoci su zadani na uzvodnom, a kote razine vode na nizvodnom kraju računskog područja. Vrijeme proračuna je izabrano tako da odgovara periodu prikupljanja podataka, uz tri dana za uspostavljanje početnog uvjeta (vrijeme stabilizacije modela), pa je sve skupa trajalo od osam dana. Kao početni uvjet zadana je horizontalna razina vode i brzina jednaka nuli u cijelom računskom području. Kalibracija modela provedena je podešavanjem Manningovog koeficijenta hidrauličke hrapavosti. Vrijednosti koeficijenta su mijenjane dok nije dobiveno zadovoljavajuće poklapanje izmjerenih i izračunanih vrijednosti. Vrijednost Manningovog koeficijenta $n = 0,03 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ usvojena je kao najpovoljnija [28]. Rezultati modela uspoređeni su s mjerenjima komponentata brzine (u i v). Na slici 7. prikazani su rezultati za profile od 2 do 7. Usporedbom rezultata za profile od 2 do 4, može se zaključiti da model MoBed2 daje malo bolje rezultate. U preostalim profilima oba modela daju zadovoljavajuća poklapanja s mjerenjima. Za kvantitativno uspoređivanje rezultata, točnost modela procijenjena je usporedbom L_1 , L_2 i L_∞ normi pogreške za sedam profila.

Tablica 2. Nejednoliko tečenje – norme pogreške za u komponentu brzine

Profil	MoBed2			Telemac-2D		
	L_1	L_2	L_∞	L_1	L_2	L_∞
1	0,453	0,202	0,138	0,102	0,051	0,035
2	0,523	0,260	0,215	0,938	0,369	0,198
3	0,258	0,136	0,107	0,211	0,120	0,099
4	0,231	0,093	0,058	0,543	0,247	0,172
5	0,379	0,160	0,099	0,32	0,146	0,112
6	0,275	0,138	0,113	0,189	0,095	0,065
7	0,403	0,181	0,104	0,275	0,135	0,104

Tablica 3. Nejednoliko tečenje – norme pogreške za v komponentu brzine

Profil	MoBed2			Telemac-2D		
	L_1	L_2	L_∞	L_1	L_2	L_∞
1	0,715	0,300	0,188	0,204	0,116	0,103
2	0,513	0,261	0,214	0,506	0,233	0,151
3	0,172	0,072	0,037	0,217	0,105	0,082
4	0,197	0,115	0,105	0,475	0,194	0,113
5	0,396	0,205	0,144	0,321	0,178	0,161
6	0,576	0,239	0,134	0,279	0,124	0,091
7	0,925	0,548	0,515	0,687	0,451	0,431

Slika 7. Nejednoliko tečenje – komponente brzine u i v

Rezultati za obje komponente brzine prikazani su u tablicama 2. i 3. Analizom ovih vrijednosti može se zaključiti da oba modela (Telemac-2D i MoBed2) u ovom primjeru daju pogrešku sličnog reda veličine. Taj zaključak vrijedi za obje komponente brzine. Iako oba modela ostvaruju isti red točnosti, vremena izvršenja proračuna se značajno razlikuju: 0,5 sata za MoBed2 i 2 sata za Telemac-2D. MoBed2 je vremenom proračuna nadmašio Telemac-2D, jer su modeli s konačnim razlikama u krivolinijskim koordinatama iznimno djelotvorni za proračune u područjima strujanja jednostavnog oblika.

5. Zaključak

U središtu pozornosti predstavljenog istraživanja bilo je ispitivanje mogućnosti različitih pristupa numeričkom modeliranju prirodnih vodotoka. Razmatrana su tri numerička modela: prvi, u kojem se koristi metoda konačnih elemenata i primjenjuje nestrukturirana računska mreža, drugi, zasnovan na metodi konačnih razlika i primjeni strukturirane mreže, i treći, u kojem se ne koristi računska mreža, a vrijednosti zavisnih

varijabli računaju se u točkama koje prate kretanje fluida. Posebna je pozornost usmjerena na analizu primjenjivosti SPH metode koja predstavlja popularnog predstavnika metoda koje ne zahtijevaju računsku mrežu u modeliranju prirodnih vodotoka. Razmatrani modeli su testirani na dva primjera strujanja kako bi se utvrdilo može li se favorizirati određeni pristup u modeliranju prirodnih vodotoka. U prvom primjeru analizirano je jednoliko strujanje. Točnost modela je ocjenjivana usporedbom rezultata numeričkih simulacija s mjerenjima na fizikalnom modelu riječne krivine. Premda se model SWE-SPHysics, u usporedbi s druga dva modela, pokazao inferioran u reprodukciji složenog strujanja u krivini, rezultati nizvodno od krivine, dobiveni ovim modelom, najmanje su odstupali od laboratorijskih mjerenja. Zato je opravdana pretpostavka da bi se daljim unapređivanjem modela mogli očekivati zadovoljavajući rezultati u simulacijama jednolikog strujanja prirodnih vodotoka. Međutim, treba imati na umu, da se osnovna prednost SPH modela, tj. odsutnost mreže, pokazala i kao značajna slabost. S obzirom na to da SPH model podrazumijeva upotrebu čestica fluida za opisivanje toka, simuliranje jednolikog strujanja sa složenim poljem brzina

zahtijeva značajno veći broj čestica od broja računskih točaka koje se koriste u druga dva razmatrana modela. Samim tim, vremenski računski korak u SPH modela mora biti značajno manji pa je metoda nepraktična za dugotrajne simulacije. Ipak, SPH metoda je privukla velik broj istraživača te se u skorijoj budućnosti mogu očekivati rješenja kojima će se razriješiti navedeni problemi.

Budući da je primjena SPH metode u simulacijama dugog trajanja nepraktična, u analizi nejednolikog strujanja su korišteni samo modeli Telemac-2D i MoBed2. Upotreba oba modela je rezultirala zadovoljavajućim poklapanjem numeričkih simulacija

i mjerenja, tako da se ni jedan model nije pokazao kao značajno točniji. Na kraju se može izvesti zaključak da su, u sadašnjoj fazi razvoja SPH metode, numerički postupci zasnovani na korištenju računskih mreža superiorniji u modeliranju prirodnih vodotoka, što osobito vrijedi kada su u pitanju simulacije dugog trajanja.

Zahvala

Ovaj rad je financiralo Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, Projekt broj TR 37009 i Projekt broj TR 37010.

LITERATURA

- [1] Horvat, Z., Isic, M., Spasojevic, M.: Two dimensional river flow and sediment transport model, *Environmental Fluid Mechanics*, 2014, <https://doi.org/10.1007/s10652-014-9375-y>
- [2] Galland, J.C., Goutal, N., Hervouet, J.M.: TELEMAC: A new numerical model for solving shallow water equations. *Advances in Water Resources*, 14 (1991) 3, pp. 138–148.
- [3] Budinski, L., Spasojevic, M.: 2-D Modelling of Flow and Sediment Interaction - Sediment Mixtures, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 140 (2013) 2, pp. 199–209.
- [4] Monaghan, J.J.: Simulating Free Surface Flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, 110 (1994), pp. 399–406, <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>
- [5] Džebo, E., Žagar, D., Krzyk, M., Četina, M., Petkovšek, G.: Different ways of defining wall shear in smoothed particle hydrodynamics simulations of a dam-break wave, *Journal of Hydraulic Research*, 52 (2014) 4, pp. 453–464.
- [6] Budinski, Lj.: MRT lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates, *Computers & Fluids*, 96 (2014), pp. 288–301, <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.03.007>
- [7] Ying, X., Jorgeson, J., Wang, S.S.Y.: Modeling dam-break flows using finite volume method on unstructured grid, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 3 (2009) 2, pp. 184–194.
- [8] Smith, C., Bates, P.D., Anderson, M.G.: Development of an inundation mapping capability using high resolution finite element modelling. Final Technical Report, European Research Office of the U. S. Army, London, England, 1997.
- [9] Erduran, K.S.: Fourth order finite volume solution to shallow water equations and application, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73 (2013), pp. 637–659.
- [10] Cioffi, F., Gallerano, F.: A two-dimensional self-adaptive hydrodynamics scheme for the assessment of the effects of structures on flooding phenomena in river basins, *River Research and Application*, 19 (2003), pp. 1–26, <https://doi.org/10.1002/rra.691>
- [11] Vacondio, R., Rogers, B.D., Stansby, P.K.: Accurate particle splitting for smoothed particle hydrodynamics in shallow water shock capturing, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69 (2012), pp. 1377–1410, <https://doi.org/10.1002/fld.2646>
- [12] Vacondio, R., Rogers, B.D., Stansby, P.K., Mingosa, P.: SPH Modeling of Shallow Flow with Open Boundaries for Practical Flood Simulation, *Journal of Hydraulic Engineering*, 138 (2012) 6, pp. 530–541.
- [13] Vacondio, R., Rogers, B.D., Stansby, P.K.: Smoothed Particle Hydrodynamics: Approximate zero-consistent 2-D boundary conditions and still shallow-water tests, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69 (2012), pp. 226–253, <https://doi.org/10.1002/fld.2559>
- [14] Hervouet, J.M.: Hydrodynamics of Free Surface Flows: Modelling with the Finite Element Method, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, UK, 2007, <https://doi.org/10.1002/9780470319628>
- [15] Yanenko, N.N.: The Method of Fractional Steps, Translated by Holt M. Springer-Verlag, New York, 1971, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65108-3>
- [16] Holly, F.M. Jr., Preissmann, A.: Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions, *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 103 (1977) HY11, pp. 1259–1277.
- [17] Isic, M., Horvat, Z., Spasojevic, M.: Advection step in the split-operator approach applied to river modeling, *Applied Numerical Mathematics*, 72 (2013), pp. 1–18, <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2013.05.001>
- [18] Biringen, S., Chow, C.Y.: An Introduction to Computational Fluid Mechanics by Example, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ., 2011, <https://doi.org/10.1002/9780470549162>
- [19] Crank, J., Nicolson, P.: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type, *Advances in Computational Mathematics*, 6 (1996), pp. 207–226, <https://doi.org/10.1007/BF02127704>
- [20] Hsieh, T.Y., Yang, J.C.: Implicit Two-Step Split-Operator Approach for Modelling Two-Dimensional Open Channel Flow, *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, 22 (2004) 2, pp. 113–139.
- [21] Lucy, L.B.: A numerical testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, 82 (1977), pp. 1013–1024, <https://doi.org/10.1086/112164>
- [22] Gingold, R.A., Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 (1977), pp. 375–389, <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>

- [23] Shaofan, L., Wing, K.L.: Meshfree Particle Methods, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [24] Elder, J.W.: The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 5 (1959) 4, <https://doi.org/10.1017/S0022112059000374>
- [25] Kapor, R.: Mathematical model of flow in shallow flow domains with space averaged basic equations. Ph.D. dissertation, University of Belgrade, 1998.
- [26] Muste, M., Yu, K., Pratt, T.: Abraham, D., Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics, Part II: fixed-vessel measurements, *Flow Measurement and Instrumentation*, 15 (2004), pp. 17–28, <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2003.09.002>
- [27] Muste, M., Yu, K., Spasojevic, M.: Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part I: moving-vessel measurements, *Flow Measurement and Instrumentation*, 15 (2004), pp. 1–16, <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2003.09.001>
- [28] Budinski, Lj., Spasojević, M., Isičić, M., Horvat, Z.: 2- and 3-D unsteady flow and transport along the Danube River between data ranges 1 (rkm 1438) and 7 (rkm 1432) – models' calibration, *Closing Conference - Danube EHT 2010 – Hungary-Serbia IPA Cross-border Co-operation Programme*, Subotica, 2011.