

Proračun sastavljenih slojevitih ploča

Marina Rakočević

Ključne riječi

sastavljena slojevita ploča, proračun, naprezanje, deformacija, dvostruki trigonometrijski red, teorija slojeva

Key words

laminated composite plate, analysis, stress, strain, double trigonometric series, theory of layers

Mots clés

plaque composite multicouche, analyse, contrainte, déformation, série double trigonométrique, théorie des couches

Ключевые слова

сборная слоистая панель, расчет, напряжение, деформация, двойной тригонометрический ряд, теория слоев

Schlüsselworte

zusammengesetzte Schichtplatte, Berechnung, Spannung, Verformung, zweifache trigonometrische Reihe, Theorie der Platten

M. Rakočević

Izvorni znanstveni rad

Proračun sastavljenih slojevitih ploča

Prikazan je proračun naprezanja i deformacija slobodno oslonjene sastavljene slojevite ploče proveden primjenom dvostrukih trigonometrijskih redova u parcijalnoj teoriji slojeva. Za simetrični i antisimetrični raspored slojeva prikazana je promjena naprezanja u karakterističnim presjecima ploče. Prikazan je utjecaj broja članova reda na maksimalnu vrijednost progiba, kao i utjecaj broja slojeva na maksimalne vrijednosti progiba, normalnih i posmičnih naprezanja u presjecima.

M. Rakočević

Original scientific paper

Analysis of laminated composite plates

The stress and strain analysis of freely supported laminated composite plates, conducted using double trigonometric series in partial theory of layers, is presented. The change of stress at typical plate sections is presented for the symmetric and antisymmetric disposition of layers. The influence of the number of members in a series on a maximum deflection value, and the influence of the number of layers on maximum deflection values, for normal and shear stresses in sections, is presented.

M. Rakočević

Ouvrage scientifique original

L'analyse des plaques composites multicouches

L'analyse contrainte-déformation des plaques composites multicouches librement appuyées, conduite à l'aide des séries trigonométriques doubles dans la théorie partielle des couches, est présentée. Le changement de contrainte dans les sections typiques de la plaque est présenté pour la disposition symétrique et antisymétrique des couches. L'influence du nombre des membres de la série sur la valeur maximale de déflexion est indiquée, et l'influence du nombre des couches sur valeurs maximales de déflexion est présentée pour les contraintes normales et tangentielles dans les sections.

M. Ракочевић

Оригинална научна работа

Расчет сборных слоистых плит

Приведен расчет напряжения и деформаций свободно прислоненной сборной слоистой плиты, проведенный с применением двойных тригонометрических рядов в парциальной теории слоев. Для симметричных и несимметричных распорядков слоев показано изменение напряжения в характерных сечениях плиты. Показано влияние числа членов ряда на максимальную величину прогиба, а также влияние количества слоев на максимальные величины прогиба, нормальных и разрезных напряжений в сечениях.

M. Rakočević

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

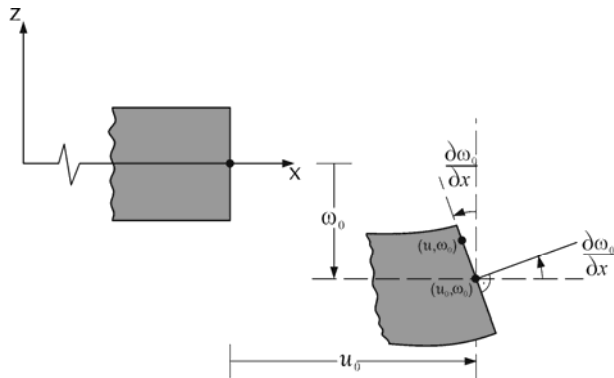
Berechnung zusammengesetzter Schichtplatten

Dargestellt ist die Berechnung der Spannungen und Verformungen frei gelagerter zusammengesetzter Schichtplatten, durchgeführt mit Anwendung zweifacher trigonometrischer Reihen in der partialen Theorie der Platten. Für die symmetrische und antisymmetrische Anordnung der Schichten ist die Änderung der Spannungen in charakteristischen Plattenquerschnitten dargestellt. Dargestellt ist der Einfluss der Anzahl der Reihenglieder auf den maximalen Wert der Durchbiegung, sowie der Einfluss der Anzahl der Schichten auf die maximalen Werte der Durchbiegung und Normal- und Schubspannungen in den Querschnitten.

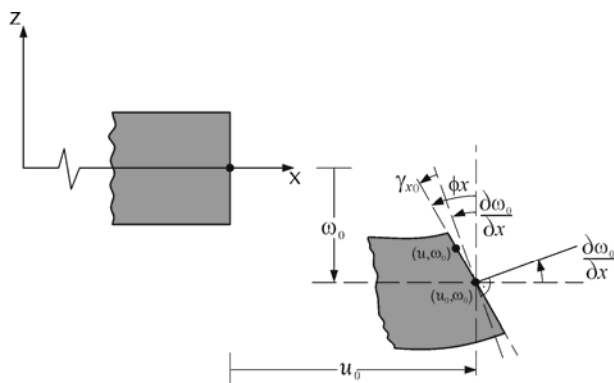
Autor: Doc. dr. sc. **Marina Rakočević**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica

1 Teorijski modeli

Sastavljene ploče, sa slojevima koji nose u različitim smjerovima u ravnini ploče, pokazuju izrazito anizotropno ponašanje. Za određivanje "realnog" stanja naprezanja i deformacija potrebno je rabiti teorije koje proračun provode na razini sloja ili razini vlakno/osnovna masa [1].



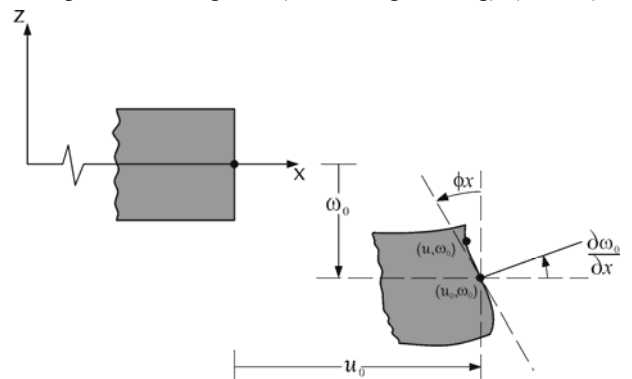
Slika 1. CLPT – klasična teorija



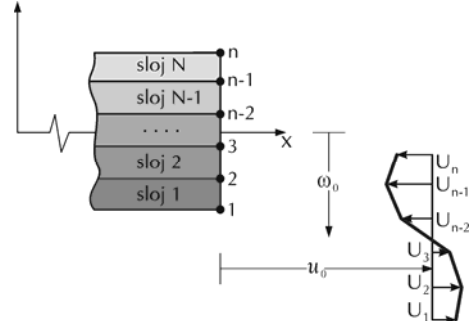
Slika 2. FSDT – teorija posmika

Proračun i teorijske raščlambe sastavljenih slojevitih ploča mogu se provesti primjenom ekvivalentnih jednoslojnih teorija (ESL-*Equivalent Single-layer Laminate Theory*) [2], [3]. ESL teorije promatraju slojevitou ploču kao statički ekvivalentan jedan sloj. Jednoslojnoj teoriji pripadaju klasična teorija i posmične teorije prvoga, drugoga i višeg reda. Najjednostavnija je ESL teorija klasična teorija slojevitih ploča (CLPT-*Classical Laminated Plate Theory*) koja je zasnovana na primjeni Kirchoffove teorije ploča (slika 1.). Ova se teorija primjenjuje za proračun homogenih tankih ploča. Za umjereno debele i debele slojevite ploče s velikim stupnjem anizotropije, rješenje dobiveno primjenom ove teorije ne zadovoljava jer se u proračun ne uvodi posmik. Sljedeća jednoslojna teorija hijerarhijski je teorija posmika prvog reda (FSDT-*First Order Shear Deformation Theory*) (slika 2.), koja je nastala zbog ograničenosti CLPT teorije. FSDT teorija uvodi konstantno klizanje po debljini ploče. Teorije posmika višeg reda (*Second-order Plate*

Theory, Third-order Plate Theory) grubu konstantnu pretpostavku posmika po debljini ploče ublažavaju upotrebom polinoma višeg reda (kvadratnog, kubnog), (slika 3.).



Slika 3. Teorija posmika višeg reda



Slika 4. GLPT – teorija slojeva

Za proračun slojevitih sastavljenih ploča primjenjuje se opća teorija slojeva (GLPT-*Generalized Layerwise Plate Theory*), (slika 4.), koja promatra slojeve ploče [4]. U ovisnosti o usvojenom polju pomaka, odnosno polju primarnih varijabli, u teoriji slojeva definiraju se parcijalna teorija slojeva (*Partial Layerwise Theory*) i potpuna teorija slojeva (*Full Layerwise Theory*). Opća teorija slojeva temelji se na ideji Reddyja na osnovi koje se pomaci mogu prikazati kao kombinacija koordinata u ravnini i funkcije koordinate po debljini:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \sum_{I=1}^n U_I(x, y, z) \phi^I(z) \\
 v(x, y, z) &= \sum_{I=1}^n V_I(x, y, z) \phi^I(z) \\
 w(x, y, z) &= \sum_{I=1}^m W_I(x, y, z) \psi^I(z)
 \end{aligned} \quad (1)$$

Komponente pomaka kod jednoslojnih teorija mogu se dobiti kao specijalan slučaj pomaka definiranih izrazima (1). Ako se usvoji da je $w = \text{const}$, odnosno da su komponente pomaka okomito na ravninu ploče konstantne po debljini dobiva se, kao specijalan slučaj GLPT teorije, parcijalna teorija slojeva [5].

Nakon usvojenog polja pomaka odabrane teorije definiraju se veze pomaka i deformacija, a nakon toga i veze

deformacija i naprezanja u ovisnosti o usvojenim fizičkim karakteristikama materijala, sve u promatranom koordinatnom sustavu (x, y, z) . Jednadžbe teorije dobivaju se primjenom principa virtualnih pomaka.

Odabir teorije za analizu napreznaja i deformacija slojevitih složenih ploča ovisi o zahtijevanoj točnosti i ekonomičnosti. Ako se analiziraju tanke ploče najekonomičnije je primijeniti jednu od ESL teorija, dok se za debele i umjereno debele ploče preporučuju teorije slojeva.

Jednadžbe navedenih teorija mogu se rješavati analitički ili numerički. Analitička se rješenja traže u obliku funkcija [6], [7] kojima se definiraju primarne varijable odgovarajuće teorije. Primjenom numeričkih metoda mogu se dobiti približna rješenja, a najviše primjenjivana numerička metoda u analizi slojevitih kompozitnih ploča jest metoda konačnih elemenata (*Finite elements methods*) [8], [9]. Numerička rješenja primarnih varijabli dobivaju se za unaprijed određene točke, ili presjeke ploče, u ravnini i/ili po debljini ploče ovisno o usvojenom matematičkom modelu.

U analizi točnosti numeričkih rješenja analitička se rješenja mogu upotrebljavati za usporedbe. U ovom je radu prikazano analitičko rješenje dobiveno primjenom dvostrukih trigonometrijskih redova za slobodno oslonjenu slojevitu ploču napregnutu na savijanje.

2 Primjena parcijalne teorije slojeva u proračunu ploče na savijanje

Promatra se pravokutna slojevita ploča u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) uz uvođenje pretpostavke da ploča sadrži N ortotropnih slojeva koji su orijentirani proizvoljno u ravnini ploče (x, y) . Svaki od slojeva sadrži vlakna koja nose samo u jednom smjeru. U parcijalnoj teoriji slojeva pretpostavlja se da su komponente pomaka proizvoljne točke ploče definirane sa:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

gdje su:

$u(x, y)$, $v(x, y)$ i $w(x, y)$ - komponente pomaka točaka srednje ravnine ploče

$U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ - dodatni pomaci točaka po debljini ploče.

Dodatni se pomaci reduciraju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{J=1}^n u^J(x, y) \psi^J(z) \\ V(x, y, z) &= \sum_{J=1}^n v^J(x, y) \psi^J(z) \end{aligned} \quad (3)$$

gdje su:

n - broj čvorova po debljini ploče

u^J i v^J - vrijednosti pomaka po debljini ploče ($J = 1, n$)

$\psi^J(z)$ - neprekinute, opće interpolacijske funkcije koje zadovoljavaju uvjet $\psi^J(0) = 0$, za $J = 1, n$.

Za linearnu interpolaciju broj čvorova po debljini ploče je za jedan veći od broja slojeva (slika 4.). U tom slučaju interpolacijska funkcija ψ^J , uzduž dvaju susjednih slojeva, prikazuje se linearnim funkcijama:

$$\phi_z^J = \begin{cases} \psi_2^{J-1}(z) = \frac{z - z_{J-1}}{z_J - z_{J-1}}, & z_{J-1} < z < z_J \\ \psi_2^J(z) = \frac{z_{J+1} - z}{z_{J+1} - z_J}, & z_J < z < z_{J+1} \end{cases} \quad (4)$$

gdje je z_J položaj J -tog čvora po debljini ploče.

Primjenom principa virtualnih pomaka dobivaju se jednadžbe savijanja slojevite ploče u parcijalnoj teoriji slojeva:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$N_{x,x}^J + N_{xy,y}^J - Q_x^J = 0$$

$$N_{xy,x}^J + N_{y,y}^J - Q_y^J = 0$$

gdje su:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (6)$$

$$(N_x^J, N_y^J, N_{xy}^J) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \psi^J(z) dz$$

$$(Q_x^J, Q_y^J) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \psi_z^J dz$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ - komponente vektora naprezanja
 q - opterećenje okomito na ravninu ploče.

Za j-ti ortotropni sloj veze komponenta naprezanja i deformacija dane su sa:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(j)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(j)} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(j)} \quad (7)$$

gdje su $\bar{Q}_{ij}^{(j)}$ - reducirane krutosti j-tog ortotropnog sloja.

Kada se veze (7) ubace u izraze za unutarnje sile (6), uz uzimanje u obzir pretpostavljenog polja pomaka (2) i (3) kao i veza deformacija i pomaka, dobivaju se jednačbe kojima se definišu veze sila i pomaka [5], [6], [7].

Način određivanja reducirane krutosti svakog sloja kao i koeficijenti krutosti slojevite ploče A_{ij}^J , B_{ij}^J i D_{ij}^J , koji su potrebni za proračun sila, određuju se na način koji je prikazan u radu [10]. Dokazuje se da krutosti slojevite ploče ovise o debljini ploče, mehaničkim karakteristikama slojeva i položaju slojeva u odnosu na srednju ravninu.

3 Analitičko rješenje za slobodno oslonjenu pravokutnu ploču

Pretpostavlja se da pravokutna slobodno oslonjena slojevita ploča ima N ortotropnih slojeva čija su vlakna orijentirana u smjeru osi x i y, odnosno čija vlakna zatvaraju kutove 0° i 90° . Raspored slojeva po debljini ploče može biti proizvoljan.

Za navedenu orijentaciju slojeva, iz uvjeta ortogonalnosti dobiva se da su krutosti slojevite ploče $A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16}^J = B_{26}^J = B_{45}^J = D_{16}^J = D_{26}^J = D_{45}^J = 0$.

U skladu s navedenim, kada se veze sila i pomaka uvrste u uvjete ravnoteže (5) dobija se sustav od $3 + 2n$ jednačbi oblika:

za $j = 1, \dots, n$, gdje je n broj čvorova.

$$A_{11}u_{,xx} + A_{12}v_{,yx} + A_{66}(u_{,yy} + v_{,xy}) + \sum_{J=1}^n [B_{11}^J u_{,xx} + B_{12}^J v_{,yx} + B_{66}^J (u_{,yy} + v_{,xy})] = 0$$

$$A_{12}u_{,xy} + A_{22}v_{,yy} + A_{66}(u_{,yx} + v_{,xx}) + \sum_{J=1}^n [B_{12}^J u_{,xy} + B_{22}^J v_{,yy} + B_{66}^J (u_{,yx} + v_{,xx})] = 0$$

$$A_{55}w_{,xx} + A_{44}w_{,yy} + \sum_{J=1}^n [B_{55}^J u_{,x} + B_{44}^J v_{,y}] + q = 0$$

$$B_{11}^J u_{,xx} + B_{12}^J v_{,yx} + B_{66}^J (u_{,yy} + v_{,xy}) - B_{55}^J w_{,x} + \sum_{J=1}^n [D_{11}^J u_{,xx} + D_{12}^J v_{,yx} + D_{66}^J (u_{,yy} + v_{,xy}) - D_{55}^J w_{,x}] = 0$$

$$B_{12}^J u_{,xy} + B_{22}^J v_{,yy} + B_{66}^J (u_{,yx} + v_{,xx}) - B_{44}^J w_{,y} + \sum_{J=1}^n [D_{12}^J u_{,xy} + D_{22}^J v_{,yy} + D_{66}^J (u_{,yx} + v_{,xx}) - D_{44}^J w_{,y}] = 0$$

Za slobodno oslonjenu ploču granični uvjeti definirani su kako slijedi:

$$v = w = V^J = N_x = N_x^J = 0 \quad x = 0, a; J = 1, n \quad (9)$$

$$u = w = U^J = N_y = N_y^J = 0 \quad y = 0, b; J = 1, n$$

Te granične uvjete zadovoljavaju sljedeće trigonometrijske funkcije (Navierovo rješenje):

$$u = \sum_{m,n} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y$$

$$v = \sum_{m,n} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y$$

$$w = \sum_{m,n} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$U^J = \sum_{m,n} R_{mn}^J \cos \alpha x \sin \beta y$$

$$V^J = \sum_{m,n} S_{mn}^J \sin \alpha x \cos \beta y$$

(10)

gdje su:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad ; \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad J = 1, \dots, n$$

Opterećenje koje djeluje okomito na ravninu ploče također se prikazuje trigonometrijskim funkcijama u obliku dvostrukog Furierova reda:

$$q(x, y) = \sum_{m,n} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (11)$$

Q_{mn} – koeficijenti koji ovise o vrsti opterećenja.

Za svaki Furierov par (m, n) dobiva se sustav $3 + 2n$ jednačbe s isto toliko nepoznatih koeficijenata

$$X_{mn}, Y_{mn}, W_{mn}, R_{mn}^J \text{ i } S_{mn}^J.$$

Kada se dobivena rješenja uvrste u (10) dobiju se vrijednosti nepoznatih pomaka.

Nakon određivanja funkcije ukupnih pomaka, za pretpostavljeni broj parova (m, n), određuju se funkcije deformacije, a nakon toga i komponente naprezanja za proizvoljnu točku slojevite ploče:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= -\sum_{m,n}^{\infty} \left\{ \bar{Q}_{11} \alpha \left(X_{mn} + \sum_{J=1}^n R_{mn}^J \phi^J(z) \right) + \bar{Q}_{12} \beta \left(Y_{mn} + \sum_{J=1}^n S_{mn}^J \phi^J(z) \right) \right\} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \sigma_y(x, y, z) &= -\sum_{m,n}^{\infty} \left\{ \bar{Q}_{21} \alpha \left(X_{mn} + \sum_{J=1}^n R_{mn}^J \phi^J(z) \right) + \bar{Q}_{22} \beta \left(Y_{mn} + \sum_{J=1}^n S_{mn}^J \phi^J(z) \right) \right\} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (12) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= \bar{Q}_{66} \sum_{m,n}^{\infty} \left\{ \beta \left(X_{mn} + \sum_{J=1}^n R_{mn}^J \phi^J(z) \right) + \alpha \left(Y_{mn} + \sum_{J=1}^n S_{mn}^J \phi^J(z) \right) \right\} \cos \alpha x \sin \beta y \end{aligned}$$

Posmična naprezanja unutar slojeva u ravnini (x, z) i (y, z) značajna su za debele ploče i ploče koje sadrže neke od oblika delaminacije. Za određivanje ovih naprezanja u radu se rabio aproksimativni postupak proračuna s pretpostavljenom paraboličnom raspodjelom uzduž promatranog sloja j [11]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}^j(z) &= N_1(z) \bar{f}_{1x}^j + N_2(z) \bar{f}_{2x}^j + N_3(z) \bar{f}_{3x}^j \\ \bar{\sigma}_{yz}^j(z) &= N_1(z) \bar{f}_{1y}^j + N_2(z) \bar{f}_{2y}^j + N_3(z) \bar{f}_{3y}^j \end{aligned} \quad (13)$$

gdje su:

- z - koordinata lokalnoga koordinatnog sustava j-tog sloja ploče
- $\bar{f}_{ix}^j, \bar{f}_{iy}^j, i = 1, 2, 3$ - nepoznati koeficijenti koji predstavljaju posmična naprezanja σ_{xz} i σ_{yz} na krajevima i u sredini promatranog sloja
- $N_1(z), N_2(z)$ i $N_3(z)$ - jednodimenzijske kvadratne interpolacijske funkcije.

Za određivanje nepoznatih koeficijenata $\bar{f}_{ix}^j, \bar{f}_{iy}^j$ za svaki od posmičnih naprezanja potrebno je napisati 3N jednadžbi koje se određuju iz sljedećih uvjeta:

- posmična naprezanja u gornjem i donjem vlaknu ploče imaju vrijednost nula
- naprezanja imaju jednake vrijednosti na vezama slojeva
- zadovoljen je uvjet o prosječnim vrijednostima posmičnih naprezanja za svaki sloj j
- zadovoljene su vrijednosti dobivene iz konstitutivnih jednadžbi.

4 Numerički primjer

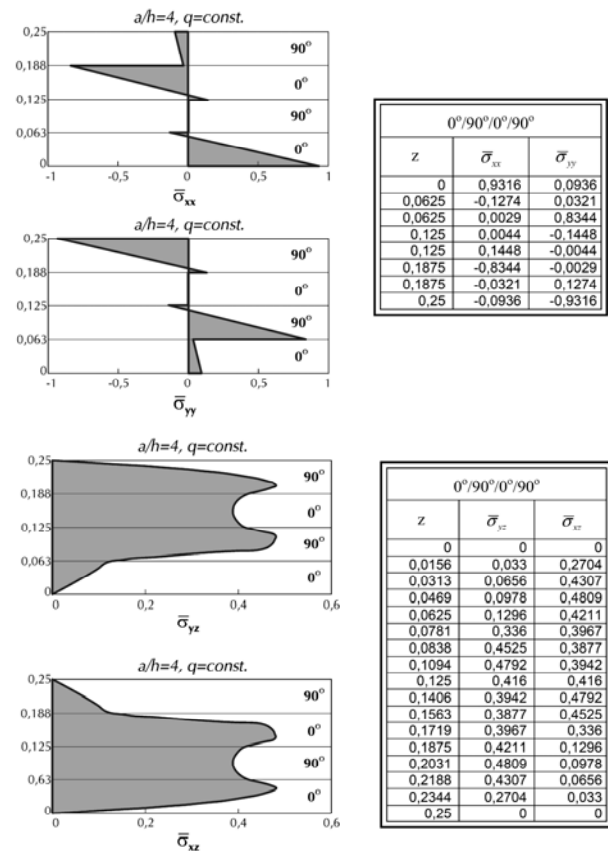
Promatra se kvadratna ploča dimenzija $a \times a$, debljine $h = 0,25$ a, sa slojevima koji naizmjenično zatvaraju kutove 0° i 90° . Materijalne karakteristike svih slojeva su iste: $E_1/E_2 = 25, E_2 = 1, G_{12} = G_{23} = 0,5, G_{33} = 0,2, \nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$.

Prikazane vrijednosti naprezanja dobivene su primjenom autoričina programa u Fortranu ANSLACOP [5] zasnovanog na primjeni dvostrukih redova u rješavanju problema savijanja slojevite ploče prema parcijalnoj teoriji slojeva.

Promatrane su točke u ravnini (x, y) s koordinatama $A = 1,105662 (a/2); B = 1,894338(a/2)$.

Karakteristična naprezanja prikazana su u točkama ploče:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \bar{\sigma}_{xx}(A, A, z); \quad \bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{yy}(A, A, z); \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \bar{\sigma}_{xz}(B, A, z); \quad \bar{\sigma}_{yz} = \bar{\sigma}_{yz}(A, B, z) \end{aligned}$$

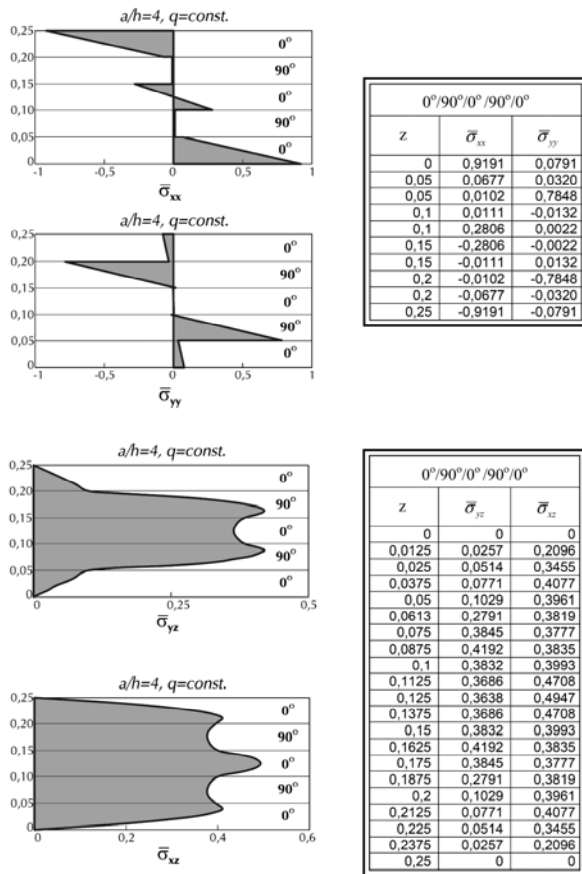


Slika 5. Naprezanja $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{yz}$ i $\bar{\sigma}_{xz}$ za ploču s antisimetričnim rasporedom slojeva $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$

Vrijednosti naprezanja dane su u bezdimenzijskom obliku [2]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{s^2 q} \sigma_{xx} & \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{s^2 q} \sigma_{yy} & \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{sq} \sigma_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{1}{sq} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad \text{gdje je: } s = a/h, h - \text{ ukupna debljina ploče.}$$

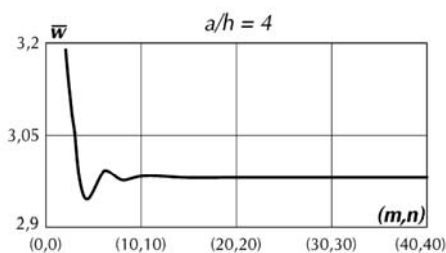
Razmatrane su ploče s $N = 4$ i $N = 5$ slojeva, antimetričnog, odnosno, simetričnog rasporeda slojeva po debljini, opterećene ravnomjerno raspodijeljenim opterećenjem intenziteta q (slike 5. i 6.). Vrijednosti naprezanja dane su u bezdimenzijskom obliku i prikazane grafički i tablično za usvojene karakteristične presjeke.



Slika 6. Naprezanja $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\sigma}_{yz}$ i $\bar{\sigma}_{xz}$ za ploču sa simetričnim rasporedom slojeva 0°/90°/0°/90°/0°

5 Analiza rezultata

Analizom dobivenih maksimalnih vrijednosti pomaka okomito na ravninu ploče, primjenom dvostrukih trigonometrijskih redova, zaključuje se da rješenje brzo konvergira. Točnost rješenja ovisi o usvojenom broju članova dvostrukog reda.

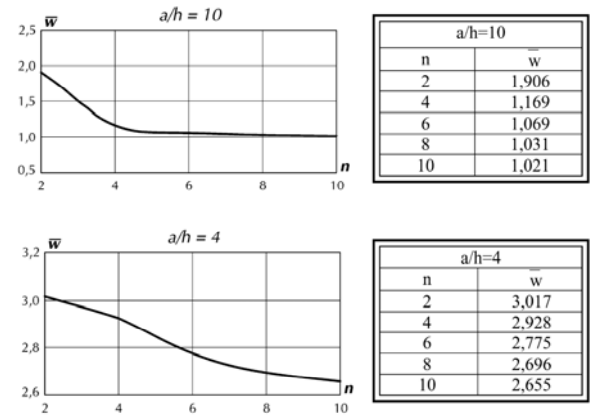


Slika 7. Dijagram progib-broj članova reda (troslojna ploča 0o/90o/0o, a/h = 4)

Konvergencija bezdimenzijske vrijednosti progiba u sredini troslojne ploče

$$\bar{w} = \frac{100E_2}{q_0hs^4} w$$

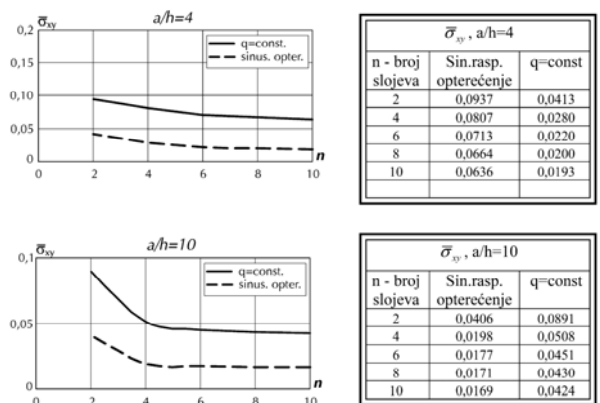
prikazana je na slici 7.



Slika 8. Dijagram broj slojeva-progib (a/h = 10 i a/h = 4)

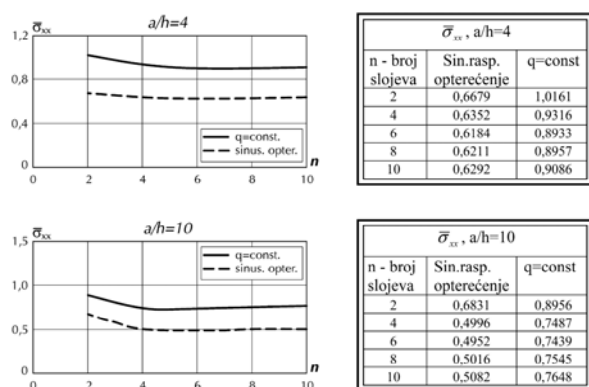
Na slici 8. prikazana je ovisnost progiba i broja slojeva ploče za odnose duljine i visine ploče a/h = 10 i a/h = 4.

Pokazuje se da se maksimalni progib može smanjiti 46,4 % za odnos a/h = 10 i 11,95 % za odnos a/h = 4 ako se zadrži ista debljina ploče, a broj slojeva uveća na 10. Zaključuje se da se dodavanjem novih slojeva može bitno utjecati na vrijednost maksimalnog progiba. Dodavanje novih slojeva ima smisla samo do određene granice.



Slika 9. Broj slojeva - $\bar{\sigma}_{xy}$

Analizom maksimalnih vrijednosti naprezanja u funkciji broja slojeva zaključuje se da se povećanjem broja slojeva može utjecati na smanjenje maksimalnih vrijednosti naprezanja u presjeku (slike 9. i 10.). Prikazane su i analizirane vrijednosti naprezanja u karakterističnim presjecima za djelovanje ravnomjerno raspodijeljenog i

Slika 10. Broj slojeva – $\bar{\sigma}_{xx}$

sinusoidalno raspodijeljenog opterećenja u oba smjera. Povećanjem broja slojeva napreznja se umanjuju ravnomjernije i s manjim intenzitetom kod debljih nego kod tanjih ploča. Kod tanjih se ploča vrijednost napreznja znatno ne mijenja nakon dodanoga četvrtoga sloja.

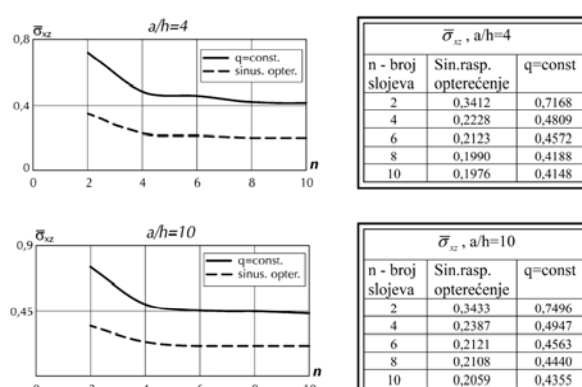
Maksimalne vrijednosti posmičnih napreznja u ravninama (x, y), (x, z) i (y, z) smanjuju se povećanjem broja slojeva pri čemu je za manji broj slojeva smanjenje znatnije (slike 9. i 11.).

6 Zaključak

Prikazano analitičko rješenje problema savijanja slojevitih sastavljenih ploča može poslužiti kao usporedno

LITERATURA

- [1] Reddy, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates - Theory and Analysis*, Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, 1997.
- [2] Reddy, J. N.; Robbins D. H., Jr: *Theories and computational models for composite laminates*, American Society of Mechanical Engineers, 1994.
- [3] Reddy, J. N.; Robbins D. H., Jr: *Theories and computational models for composite laminates*, Applied Mechanics Reviews vol47, no6, part1, June 1994.
- [4] Robbins, D. Jr; Reddy, J. N.: *Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol36, 655-677(1993).
- [5] Rakočević, M.: *Statička analiza slojevitih kompozitnih ploča primjenom metode konačnih elemenata*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta Crna Gora, Podgorica, 2005.
- [6] Rakočević, M.; Vuksanović, Đ.: *Analytical solution of laminated rectangular composite plates*, Monograph "Researches", Faculty of Civil engineering, Podgorica, str.253-266, 2002.

Slika 11. Ovisnost broj slojeva – $\bar{\sigma}_{xz}$

rješenje za numerička rješenja, kao što su rješenja koja se dobivaju primjenom metode konačnih elemenata [8].

Rješenje u obliku dvostrukih trigonometrijskih redova jednadžbi savijanja ploča zasnovano na parcijalnoj teoriji slojeva stabilno je i konvergentno. Primjenom analitičkog rješenja dobiva se "realnija" promjena napreznja i deformacija po debljini debelih i umjereno debelih ploča.

Zaključuje se da je povećanjem broja slojeva moguće znatno umanjiti vrijednosti progiba kao i maksimalne vrijednosti normalnih i posmičnih napreznja u presjeku. Broj slojeva za koji se dobivaju umanjene vrijednosti napreznja i deformacija ograničen je s gornje strane.

- [7] Vuksanović, Đ.; Rakočević, M.: *Opšta teorija laminarnih ploča-analitičko rješenje za slobodno oslonjene ploče*, Simpozijum o istraživanjima i primjeni savremenih dostignuća u našem građevinarstvu u oblasti materijala i konstrukcija, JUDIMK oktobar, 2002, 125-130.
- [8] Rakočević, M.: *Napreznje u slojevitim kompozitnim pločama*, Građevinar 57(2005), 503-509, 2005.
- [9] Reddy, J.N.; E.J.Barbero, E.J.: *A plate bending element based on a generalized laminated plate theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.28, 2275-2292(1989).
- [10] Rakočević, M.: *Proračun krutosti slojevitih kompozitnih ploča*, Zbornik radova GNP- Internacionalni naučno-stručni skup građevinarstvo-nauka i praksa, Žabljak,Knjiga 1.,str.67-72.,20-24.februar 2006.
- [11] Chaudhuri, R.A.; Seide, P.: *An approximate semi-analytical method for prediction of interlaminar shear stresses in an arbitrarily laminated thick plate*, Computers and Structures, Vol.25, No.4, pp.627-636, 1987.