

# Model nelinearnog puzanja betona

Jure Radnić, Domagoj Matešan

## Ključne riječi

nelinearno puzanje  
betona,  
numerički model,  
ploča,  
ljuska,  
dugotrajno opterećenje,  
naprezanje

## Key words

nonlinear creep of  
concrete,  
numerical model,  
slab,  
shell,  
long-term load,  
stress

## Mots clés

fluage non-linéaire de  
béton,  
modèle numérique,  
dalle,  
coque,  
charge à long terme,  
contrainte

## Ключевые слова

нелинейная ползучесть  
бетона,  
цифровая модель,  
плита,  
оболочка,  
длительная нагрузка,  
напряжение

## Schlüsselworte

unlineares Kriechen des  
Betons,  
numerisches Modell,  
Platte,  
Schale,  
langdauernde Belastung,  
Spannung

J. Radnić, D. Matešan

Prethodno priopćenje

## Model nelinearnog puzanja betona

Ukratko je opisan linearni model puzanja betona koji je prethodno razvijen u numeričkom modelu za analizu betonskih ploča i ljusaka pod djelovanjem dugotrajnog opterećenja. Taj je model unaprijeđen modelom nelinearnog puzanja betona. Objašnjeno je da se taj model može upotrebljavati za sve razine naprezanja, ali ga za vrlo visoke razine naprezanja još treba eksperimentalno provjeriti. Pokazano je da se rezultati eksperimenata dobro slažu s numerički dobivenim vrijednostima.

J. Radnić, D. Matešan

Preliminary note

## Model for nonlinear creep of concrete

The linear concrete creep model, previously developed in the numerical model for the analysis of concrete slabs and shells subjected to long-term load, is briefly presented. This model has been improved by the nonlinear concrete creep model. It is explained that this model can be used for all stress levels, although it should additionally be checked through experiments for very high levels of stress. It is demonstrated that experimental results correspond well with numerically obtained values.

J. Radnić, D. Matešan

Note préliminaire

## Le modèle de fluage non-linéaire de béton

Le modèle de fluage linéaire de béton, développé précédemment dans le modèle numérique pour l'analyse des dalles et des coques de béton soumises à la charge de long durée, est brièvement présenté. Ce modèle a été amélioré par le modèle de fluage non-linéaire de béton. Il est expliqué que ce modèle peut être utilisé pour tous les niveaux de contrainte, mais qu'il devrait être davantage vérifié par expériences pour les niveaux de contrainte très élevés. Il a été démontré que les résultats expérimentaux correspondent bien aux valeurs numériques.

Џ. Раднич, Д. Матешан

Предварительное сообщение

## Модель нелинейной ползучести бетона

В краткой форме описана линейная модель ползучести бетона, разработанная ранее в цифровой модели для анализа бетонных плит и оболочек, находящихся под действием длительной нагрузки. Данная модель усовершенствована моделью нелинейной ползучести бетона. Указывается, что эта модель может использоваться для всех уровней напряжения, но при высоких уровнях напряжения требует дополнительной экспериментальной проверки. Показано, что результаты экспериментов хорошо согласуются со значениями, полученными при цифровом моделировании.

J. Radnić, D. Matešan

Vorherige Mitteilung

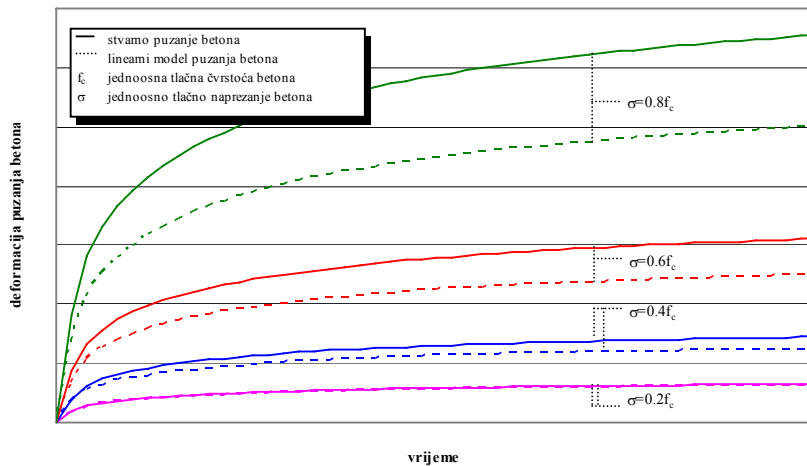
## Modell des unlinearen Kriechens des Betons

In Kürze beschreibt man ein lineares Modell des Kriechens des Betons welches vorher im numerischen Modell für die Analyse von Beton - Platten und - Schalen unter Einwirkung langdauernder Belastung entwickelt worden war. Dieses Modell ist befördert durch das Modell des unlinearen Kriechens des Betons. Erklärt ist dass dieses Modell für alle Spannungszustände angewendet werden kann, doch soll es für sehr hohe Spannungszustände noch experimental überprüft werden. Es wird gezeigt dass die Ergebnisse der Experimente gut mit den numerisch gewonnenen Werte übereinstimmen.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Domagoj Matešan**, dipl. ing. građ., Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Matice hrvatske 15, Split

1 Uvod

Eksperimentalno je utvrđeno da linearna funkcijska veza između deformacije puzanja betona u vremenu i trenutno elastične deformacije betona vrijedi samo za mala naprezanja betona. Prema mnogim autorima, vidi [1-3], kad je odnos između naprezanja betona od dugotrajnoga statičkog opterećenja i srednje tlačne čvrstoće betona veći od 0,4, gubi se navedeni linearni odnos trenutnih i vremenskih deformacija i dolazi do progresivnoga nelinearnog povećanja deformacija puzanja be-



Slika 1. Kvalitativni prikaz utjecaja razine naprezanja betona na točnost linearnog modela puzanja betona

tona (slika 1.). Kad naprezanje betona od dugotrajnog statičkog opterećenja prijeđe 80 % vrijednosti srednje tlačne čvrstoće betona, puzanje dovodi do sloma betona u vremenu. Brojni su različiti pokušaji analitičkog opisanja stvarnog puzanja betona. Neki modeli nelinearnog puzanja betona, bazirani na različitim reološkim modelima i/ili na modelima jednoosnih eksperimentalnih ispitivanja, mogu se naći u [4-8].

2 Model linearnog puzanja betona

U nastavku je ukratko opisan prethodno razvijen linearni model puzanja betona koji je uključen u numerički model za proračun betonskih ploča i ljusaka pod dugotrajnim opterećenjem [9, 10].

Za proračun jednoosne deformacije puzanja uporabljena je metoda Glanvillea i Dischingera, koja je temeljena na pretpostavci da je brzina puzanja funkcija tekućega jednoosnog naprezanja betona i proteklog vremena  $t$  nakon opterećivanja, tj.

$$\frac{d\varepsilon_t^c}{dt} = f(\sigma, t) \tag{1}$$

Ako se vrijeme podijeli u diskretne vremenske intervale  $\Delta t$ , uz  $t_n = t$  i  $t_{n+1} = t + \Delta t$ , inkrementalna verzija jednadžbe (1) ima oblik

$$\Delta\varepsilon_{t_{n+1}}^c = \varepsilon_{t_{n+1}}^m \Delta\Phi_{t_n, t_{n+1}} = \varepsilon_{t_{n+1}}^m [\Phi_{t_{n+1}} - \Phi_{t_n}] \tag{2}$$

gdje  $\Delta\varepsilon_{t_{n+1}}^c$  označava prirast deformacije puzanja između vremena  $t_n$  i  $t_{n+1}$ ,  $\varepsilon_{t_{n+1}}^m$  je trenutna mehanička deformacija betona u vremenu  $t_{n+1}$  (može biti nelinearna funkcija naprezanja  $\sigma$ ),  $\Delta\Phi_{t_n, t_{n+1}}$  je prirast koeficijenta

puzanja između vremena  $t_n$  i  $t_{n+1}$ ,  $\Phi_{t_{n+1}}$  je koeficijent puzanja za vrijeme  $t_{n+1}$  i  $\Phi_{t_n}$  je koeficijent puzanja za vrijeme  $t_n$ .

Inkrement deformacije puzanja  $\Delta\varepsilon_{t_{n+1}}^c$  je proračunan na temelju uvjeta na početku predstojećega vremenskog inkrementa  $t_{n+1}$ . Ova metoda, u osnovi vrlo jednostavna, dobro opisuje povijest deformiranja čak i u slučaju nagle i nepravilne promjene naprezanja. Budući da je inkrement deformacije puzanja temeljen samo na tekućoj trenutnoj deformaciji (ili naprezanju) i vremenskim vrijednostima, ova je metoda vrlo atraktivna s proračunskog gledišta.

Za koeficijente puzanja odabrane su vrijednosti prema Eurokodu 2 [13] pa se sukladno tome i izraz (2) može napisati u obliku

$$\Delta\varepsilon_{t_{n+1}}^c = \varepsilon_{t_{n+1}}^m [\Phi_{t_{n+1}, t_0} - \Phi_{t_n, t_0}] \tag{3}$$

gdje je

$$\Phi_{t_{n+1}, t_0} = \Phi_0 \beta_{t_{n+1}, t_0}^c \tag{4}$$

$$\Phi_{t_n, t_0} = \Phi_0 \beta_{t_n, t_0}^c \tag{5}$$

Ako se izrazi (4) i (5) uvrste u izraz (3), slijedi

$$\Delta\varepsilon_{t_{n+1}}^c = \varepsilon_{t_{n+1}}^m \Phi_0 [\beta_{t_{n+1}, t_0}^c - \beta_{t_n, t_0}^c] \tag{6}$$

U gornjim izrazima  $\Phi_0$  označava osnovnu veličinu puzanja betona, a  $\beta_{t_{n+1}, t_0}^c$  i  $\beta_{t_n, t_0}^c$  koeficijente kojima se opisuje vremenski tijek puzanja pod opterećenjem.

Osnovna vrijednost puzanja  $\Phi_0$  može se odrediti s pomoću

$$\Phi_0 = \Phi_{RH} \beta_{f_{cm}} \beta_{t_0} \tag{7}$$

gdje  $\Phi_{RH}$  označava koeficijent kojim se uzima utjecaj relativne vlažnosti,  $\beta_{f_{cm}}$  koeficijent kojim se uzima utjecaj čvrstoće betona i  $\beta_{t_0}$  koeficijent kojim se uzima utjecaj starosti betona na početku djelovanja opterećenja na osnovnu vrijednost puzanja. Pri tome je

$$\Phi_{RH} = 1 + (1 - RH / 100) / (0,1 h_0^{1/3}) \quad (8)$$

$$\beta_{f_{cm}} = 16,8 / f_{cm}^{0,5} \quad (9)$$

$$\beta_{t_0} = 1 / (0,1 + t_0^{0,2}) \quad (10)$$

$$h_0 = 2 A_c / u \quad (11)$$

U gornjim izrazima  $RH$  označava relativnu vlažnost (u %),  $h_0$  srednji polumjer elementa (u mm),  $f_{cm}$  srednju tlačnu čvrstoću betona kod starosti od 28 dana (u N/mm<sup>2</sup>),  $t_0$  starost betona u trenutku prvog nanošenja opterećenja (u danima),  $A_c$  ploštinu presjeka (u mm<sup>2</sup>) i  $u$  opseg presjeka izloženog zraku (u mm).

Koeficijenti s kojima se opisuje vremenski tijek puzanja mogu se proračunati s pomoću

$$\beta_{t_{n+1}, t_0}^c = [(t_{n+1} - t_0) / (\beta_H + t_{n+1} - t_0)]^{0,3} \quad (12)$$

$$\beta_{t_n, t_0}^c = [(t_n - t_0) / (\beta_H + t_n - t_0)]^{0,3} \quad (13)$$

U prethodnim izrazima  $t_n$  i  $t_{n+1}$  označavaju rubna vremena promatranoga vremenskog inkrementa (u danima), a  $\beta_H$  koeficijent kojim se uzima utjecaj relativne vlažnosti  $RH$  (u %) i srednjeg polumjera elementa  $h_0$  danog izrazom

$$\beta_H = 1,5 \left[ 1 + (0,012 RH)^{1,8} \right] h_0 + 250 \leq 1500 \quad (14)$$

Utjecaj vrste cementa na veličinu puzanja betona može se uzeti u obzir tako da se starost betona u trenutku prvog opterećenja  $t_0$  preinači prema

$$t_0 = t_{0,T} \left( 9 / \left[ 2 + (t_{0,T})^{1,2} \right] + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \quad (15)$$

gdje je izmijenjena starost betona (u danima) u trenutku nanošenja opterećenja, uzevši u obzir utjecaj temperature, a  $\alpha$  eksponent ovisan o vrsti cementa:

$a = -1$  za sporovezujuće cemente

$a = 0$  za normalne i brzovezujuće cemente (16)

$a = 1$  za brzovezujuće visokovrijedne cemente.

Utjecaj varijacije temperature u području između 0 °C i 80 °C na stupanj očvršćivanja betona može se uzeti u obzir izmjenom starosti betona prema

$$t_T = \sum_{i=1}^n \exp \left\{ - \left[ 4000 / (273 + T_{\Delta t_i}) \right] - 13,65 \right\} \Delta t_i \quad (17)$$

gdje je  $t_T$  podešena starost betona (u danima) uzevši u obzir utjecaj temperature,  $T_{\Delta t_i}$  je temperatura (u °C) u razdoblju  $\Delta t_i$  (broj dana s temperaturom  $T$ ).

Srednji koeficijent varijacije za prognozu puzanja prema navedenim jednadžbama, koji je određen prema banci podataka laboratorijskih pokusa, iznosi oko 20 %.

Kako se razmatrana prostorna diskretizacija odnosi na probleme ljsaka [9, 10], s deformacijama  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , računano je s jednakim koeficijentima puzanja za sve komponente deformacije. Pri tome su koeficijenti puzanja, odnosno inkrementi puzanja po pojedinim komponentama deformacije, određeni kako je to prikazano za jednodimenzijski problem.

### 3 Modeli nelinearnog puzanja betona

U nastavku su ukratko opisana dva empirijska modela nelinearnog puzanja betona. Također je predložen originalni model za simulaciju nelinearnog puzanja betona, koji se pokazao dobrim pri numeričkoj simulaciji provedenih eksperimentalnih ispitivanja betonske ploče i betonske ljsuke [11, 12] pod relativno velikim dugotrajnim statičkim opterećenjem.

#### 3.1 Model nelinearnog puzanja betona prema Eurokodu 2

Prema modelu iz Eurokoda 2 [13], nelinearno puzanje betona u vremenu  $t_0$  može se dovoljno točno opisati za srednje razine odnosa naprezanja betona od dugotrajnoga statičkog opterećenja  $\sigma_c$  i srednje tlačne čvrstoće betona  $f_{cm}$  u području  $0,4 f_{cm}(t_0) < |\sigma_c| \leq 0,6 f_{cm}(t_0)$ . Koeficijent nelinearnog puzanja  $\Phi_k$  betona dobije se tako da se koeficijent linearnog puzanja betona  $\Phi_0$  pomnoži s faktorom puzanja  $F(\sigma_c)$ , tj.

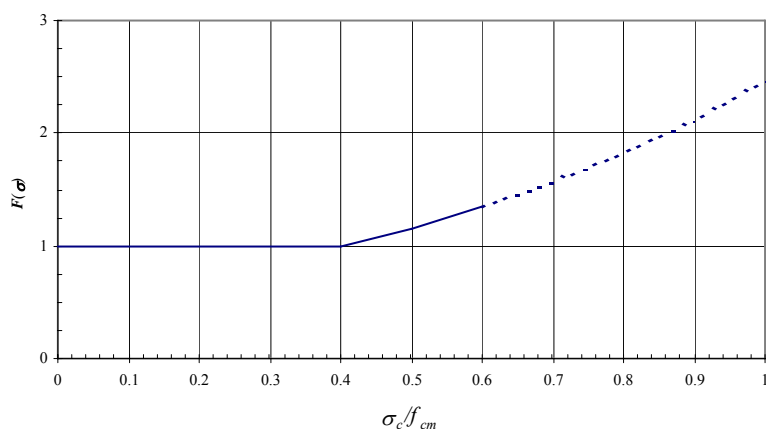
$$\Phi_k = \Phi_0 F(\sigma_c) \quad (18)$$

Nelinearni faktor puzanja  $F(\sigma_c)$  definiran je kao jednostavna funkcijska ovisnost trenutačnog naprezanja betona zbog statičkog opterećenja  $\sigma_c$  i srednje vrijednosti tlačne čvrstoće betona  $f_{cm}$  izrazom

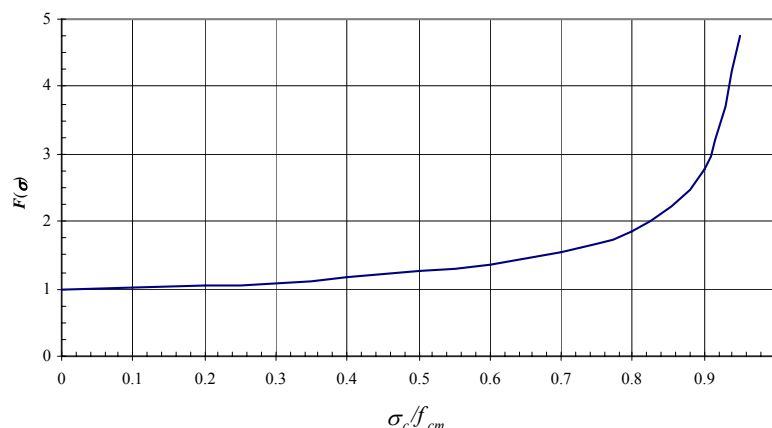
$$F(\sigma_c) = e^{1,5 \left( \frac{|\sigma_c|}{f_{cm}(t_0)} - 0,4 \right)} \quad (19)$$

Model je jednostavan i daje zadovoljavajuće rezultate u primjeni. Glavni mu je nedostatak usko područje razine naprezanja koje pokriva (slika 2.).

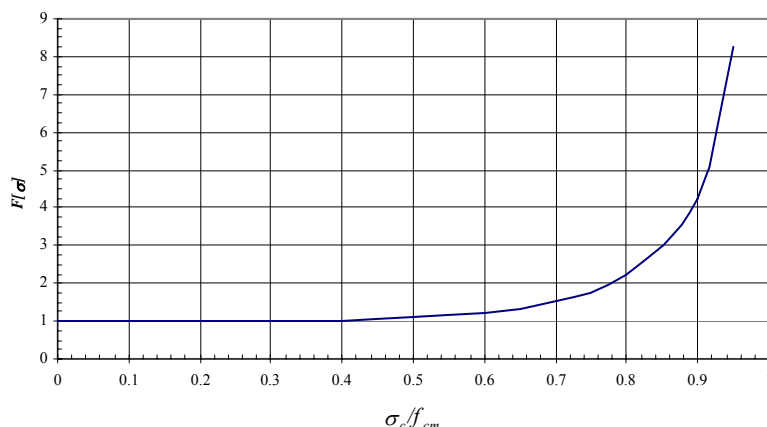
### 3.2 Model nelinearnog puzanja betona prema [1, 2, 3]



Slika 2. Funkcija nelinearnog puzanja betona prema Eurokodu 2 [11]



Slika 3. Funkcija nelinearnog puzanja betona prema Bažantu, Prasannanu [2, 3]



Slika 4. Funkcija nelinearnog puzanja betona prema Bažantu i Kimu [1]

Na području istraživanja modeliranja puzanja betona posebno se istaknuo Bažant koji je razvio razne modele puzanja betona (vidi [1-8]). Ovdje su predstavljena dva njegova modela [1-3], koja obuhvaćaju područje velikih i vrlo velikih naprezanja betona zbog dugotrajnoga statičkog opterećenja.

Prema [2, 3] nelinearni faktor puzanja  $F(\sigma_c)$  može se definirati kao empirijski izraz funkcijske ovisnosti trenutačnog naprezanja betona zbog statičkog opterećenja  $\sigma_c$  i tlačne čvrstoće betona  $f_c$  prema izrazu

$$F(\sigma_c) = \frac{1+s^2}{1-\Omega} \quad (20)$$

gdje je  $s = \sigma_c/f_c$ , a  $\Omega = s^{10}$ . Pri tome je  $\Omega$  mjera utjecaja oštećenja betona pri velikim naprezanjima, tj. pri razvoju mikropukotina. Izraz vrijedi za šire područje nego izraz (19), tj. za velike razine naprezanja. Ipak, za naprezanja betona veća od  $0,7 f_c$  predstavlja samo orijentacijsku vrijednost.

Za slučaj naprezanja betona veća od  $0,7 f_c$ , kad je odnos naprezanja  $(|\sigma_c|/f_c) \rightarrow 1$ , odnosno kad je  $F(\sigma_c) \rightarrow \infty$ , predložen je sljedeći izraz prema [1]:

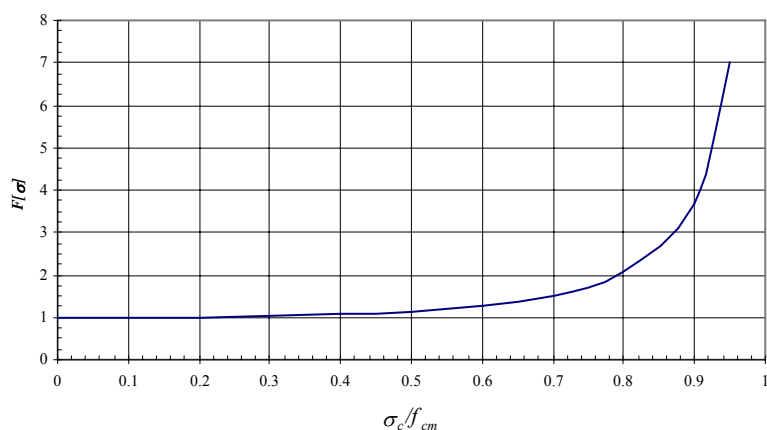
$$F(\sigma_c) = \frac{1+3s^5}{1-\Omega} \quad (21)$$

### 3.3 Predloženi model nelinearnog puzanja betona

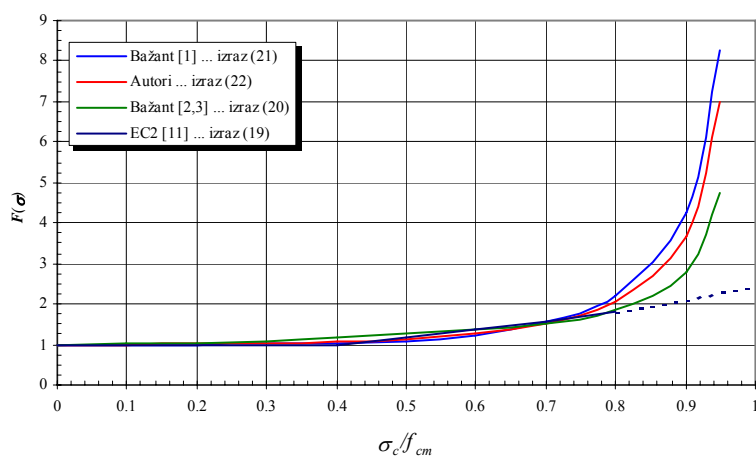
Slično kao i za prethodno opisane modele, predložen je empirijski izraz za nelinearno puzanje betona koji je uporabljen za numeričko modeliranje eksperimentalnog ispitivanja betonske ploče i ljuske pod dugotrajnim opterećenjem [11, 12]. Uzimajući u obzir prije svega potrebu za jednostavnim praktičnim modelom nelinearnog puzanja betona, usvojena je jednostavna funkcija za nelinearni faktor puzanja  $F(\sigma_c)$  u ovisnosti o trenutačnom naprezanju betona zbog statičkog opterećenja  $\sigma_c$  i tlačnoj čvrstoći betona  $f_c$  prema izrazu

$$F(\sigma_c) = \frac{1}{1 - \left(\frac{|\sigma_c|}{f_c}\right)^3} \quad (22)$$

Ova funkcija pokriva sve razine naprezanja od  $0 < |\sigma_c| \leq f_{cm}(t_0)$  (slika 5.), a kontinuirana je i jednostavna za računalnu primjenu. Ipak, za razine naprezanja  $|\sigma_c| > 0,8 f_{cm}(t_0)$  predloženi model nije potpuno pouzdan.



Slika 5. Predložena funkcija nelinearnog puzanja betona



Slika 6. Usporedba razmatranih funkcija nelinearnog puzanja betona

Predloženi model nelinearnog puzanja betona temelji se na provedenim eksperimentalnim istraživanjima manjeg

nekim eksperimentalno utvrđenih i dobivenih numeričkih rezultata.

opsega, koja se planiraju proširiti i intenzivirati. Tek bi se potom točnije definirao pouzdani nelinearni model puzanja betona za sve razine naprežanja.

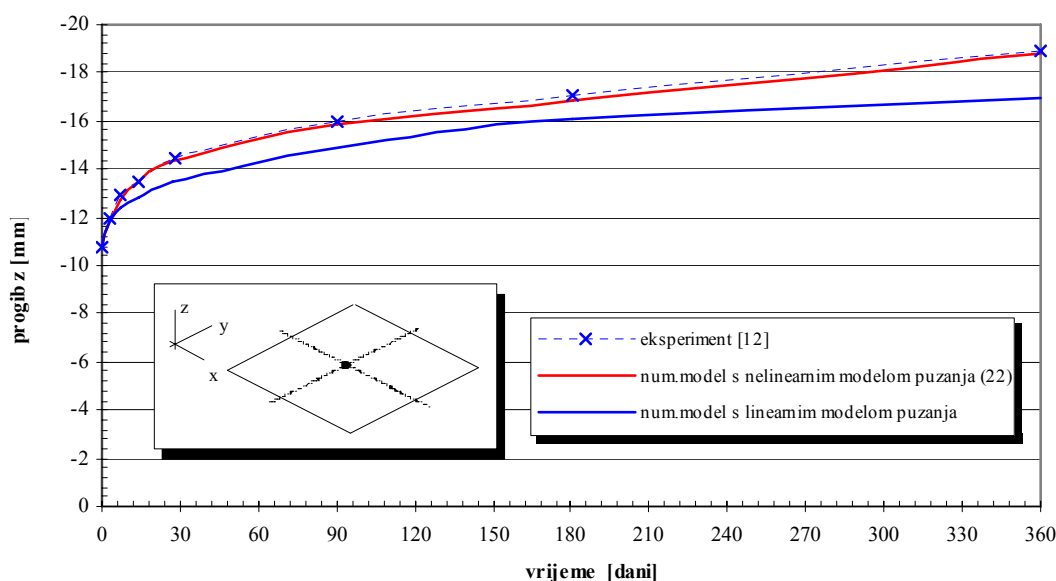
Na slici 6. prikazani su uspoređeni modeli nelinearnog puzanja betona prema izrazima (19), (20), (21) i (22).

#### 4 Primjena predloženog modela nelinearnog puzanja betona

Predloženi model nelinearnog puzanja betona prema izrazu (22) uključen je u numerički model za statički proračun prednapetih betonskih ploča i ljsaka pod dugotrajnim opterećenjem [9, 10]. Ovaj je numerički model provjeren na rezultatima eksperimentalnog ispitivanja klasično armirane betonske ploče [11] i prednapete betonske ljsuke [12] pod relativno visokim razinama dugotrajnoga statičkog opterećenja.

Detaljni opis provedenih eksperimenata i razvijenog numeričkog modela može se naći u prethodno navedenima radovima i ovdje se neće ponavljati.

Ukratko će se iznijeti samo usporedba



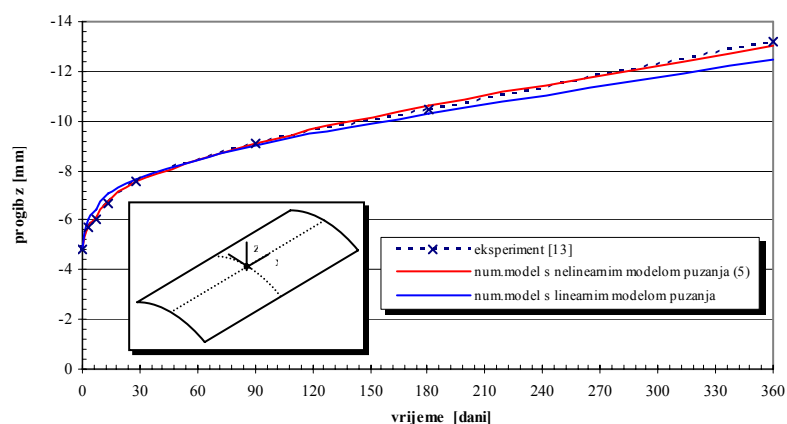
Slika 7. Usporedba eksperimentalno utvrđenih progiba u sredini klasično armirane ploče [12] i rezultata numeričke analize s modelom [9, 10]

#### 4.1 Eksperimentalno ispitivanje i numerička simulacija betonske ploče

Najprije je eksperimentalno ispitana kvadratna klasično armirana ploča oslonjena na uglovima [11], koja je opterećena površinskim opterećenjem. Potom je simulirana prethodno razvijenim numeričkim modelom [9, 10] s linearnim modelom puzanja iz točke 2. i nelinearnim modelom puzanja prema izrazu (22). Na slici 7. prikazan je progib ploče u sredini raspona u vremenu.

Može se zapaziti dobro slaganje eksperimentalno izmjerenih i proračunskih vrijednosti, a osobito onih s nelinearnim modelom puzanja betona.

I ovdje se može uočiti dobro slaganje eksperimentalno utvrđenih i proračunskih vrijednosti pomaka ljsuke, a osobito za nelinearni model puzanja betona.



Slika 8. Usporedba eksperimentalno utvrđenih progiba prednapete betonske ljsuke [13] u sredini ljsuke i rezultata proračuna s modelom [9, 10]

#### 4.2 Eksperimentalno ispitivanje i numerička simulacija prednapete betonske ljsuke

Nakon provedenoga eksperimentalnog ispitivanja prednapete cilindrične betonske ljsuke oslonjene u uglovima i opterećene linijskim opterećenjem u tjemenu [12], proveden je proračun numeričkim modelom [9, 10]. Na slici 8. prikazani su rezultati progiba u sredini ljsuke s utvrđenim eksperimentalnim vrijednostima te numerički rezultati s linearnim modelom puzanja betona i nelinearnim modelom puzanja prema izrazu (22).

## 5 Zaključak

Prikazan je jednostavni model za uključivanje nelinearnog puzanja betona pri velikim naprezanjima koji je namijenjen širokoj praktičnoj primjeni. Numerički rezultati primjene modela dobro se slažu s utvrđenim eksperimentalnim rezultatima klasično armirane betonske ploče i prednapete betonske ljsuke. Potrebno je daljnje poboljšanje modela nelinearnog puzanja betona za vrlo velika naprezanja, kao i njegova daljnja eksperimentalna verifikacija.

## LITERATURA

- [1] Bažant, Z.P.; Kim, S.S.: *Nonlinear creep of concrete - adaptation and flow*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division (1979) 105, 429-445.
- [2] Bažant, Z.P.; Prasannan, S.: *Solidification theory for concrete creep. Part I: Formulation*, Journal of Engineering Mechanics (1989) 115, 1691-1703.
- [3] Bažant, Z.P.; Prasannan, S.: *Solidification theory for concrete creep. Part II: Verification and Application*, Journal of Engineering Mechanics (1989) 115, 1704-1725.
- [4] Bažant, Z.P.; Osman, E.: *Double power law for basic creep of concrete*, Materials and Structures (1976) 9, 3-11.
- [5] Bažant, Z.P.; Asghari A.A.: *Constitutive law for nonlinear creep of concrete*, Journal of the Engineering Mechanics Division (1977) 103, 113-124.
- [6] Bažant, Z.P.; Panula, L.: *Creep and shrinkage characterization for prestressed concrete structures*, Journal of Prestressed Concrete Institute (1980) 25, 86-122.
- [7] Bažant, Z.P.; Chern, J.C.: *Log-double-power law for concrete creep*, ACI Journal (1985) 82, 675-685.
- [8] Bažant, Z.P.; Kim, J.K.: *Improved prediction model for time - dependent deformations of concrete: Part 2 - Basic creep*, Materials and Structures (1991) 24, 409-421.
- [9] Radnić, J.; Matešan, D.: *Analiza prednapetih betonskih ljsuka pod dugotrajnim opterećenjem*, Građevinar (2010) 62, 183-196.
- [10] Radnić, J.; Matešan, D.: *Nonlinear time-dependent analysis of prestressed concrete shells, Materials with complex behaviour - modelling, simulation, testing, and applications*, Öchsner A., da Silva L.F.M., Altenbach H. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, (2010) 165-179.
- [11] Radnić, J.; Matešan, D.: *Experimental testing of RC slab behaviour under long-term load*, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (2008) 39, 157-161.
- [12] Radnić, J.; Matešan, D.: *Testing of prestressed concrete shell under long-term loading and unloading*, Experimental Mechanics (2010) 50, 575-588.
- [13] HRN ENV 1992-1-1:2004. Eurokod 2: *Projektiranje betonskih konstrukcija - 1-1 dio: Osnove i pravila primjene za zgrade*